INSTITUTUL DE CONSTRUCTII BUCUREȘTI

Ing. Dragomir Sergiu

Ing. Ieremia Mircea

CULEGERE DE PROBLEME DE REZISTENTA MATERIALELOR

VOL. I

1966

Lip=2

CAPITOLUL I. SOLICITARI AXIALE. EFORTURI DIN TEMPERATURA SI MONTAJ

GENERALITATI. DEFINITII SI FORMULE

1. Formulele de verificare - dimensionare ale unei bare solicitată la întindere (compresiune) sînt :

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A} \leq \sigma_{adm} \text{ - verificare}$$

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a} \text{ - dimensionare}$$

2. Forţa capabilă pe care o poate suporta bara

$$N_{cap} = A_{ef} \times \sigma_a$$

3. Alungirea barei solicitată la întindere

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{Nl}{EA}$$

4. Dacă se ţine seama de greutatea proprie a materialului din care este alcătuită bara (prismatică), formulele de verificare - dimensionare, devin :

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A} + \gamma l \leq \sigma_a$$

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a - \gamma l}$$

5. Alungirea barei sub efectul greutăţii proprii :

$$\Delta l = \frac{\gamma l^2}{2E}$$

6. Distribuţia eforturilor unitare într-o bară alcătuită din două materiale (A_1 şi A_2) solidarizate astfel încît să se deformeze în mod egal:

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_1 + \frac{E_2}{E_1} \cdot A_2} \; ; \qquad \sigma_2 = \frac{N}{A_2 + \frac{E_1}{E_2} \cdot A_1}$$

7. Energia de deformaţie acumulată la întindere (compresiune)

$$L = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E \cdot \varepsilon^2}{2}$$ (energia pe unitatea de volum = = lucrul mecanic specific)

$$L = \int_V dL = \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{EA} dx$$ (energia totală)

8. Intr-o bară de beton armat (material neomogen), sarcina de rupere este egală cu suma sarcinilor de rupere corespunzătoare părţii de beton şi celei de oţel (metoda sarcinii admisibile).

$$P_r = A_b \cdot R_{pr} + A_o \cdot \sigma_c$$

unde: R_{pr} - rezistenţa prismatică (de rupere prin compresiune) a betonului

σ_c - rezistenţa de curgere a oţelului

Condiţia de rezistenţă devine:

$$P \leq P_{adm} = \frac{P_r}{C} = A_b \cdot \sigma_{ab} + A_o \cdot \sigma_{ao}$$

unde: σ_{ab} - rezistenţa admisibilă a betonului

σ_{ao} - rezistenţa admisibilă a oţelului (1 400 $\frac{kG}{cm^2}$)

9. Coeficientul de siguranţă al oţelului OL 38

- la rupere: $C = \frac{\sigma_r}{\sigma_a} = \frac{3\,800}{1\,400} = 2{,}71$

- la curgere: $C = \frac{\sigma_c}{\sigma_a} = \frac{2\,400}{1\,400} = 1\,714$

10. Efortul unitar care se produce într-o bară omogenă supusă unei variaţii de temperatură Δt°, a cărei dilatare este împiedicată.

$$\sigma = E \cdot \alpha \Delta t^\circ \quad \left(\frac{kG}{cm^2} \right)$$

α - coeficientul de dilatare termică liniară

11. Alungirea unei bare liberă la un capăt, supusă la o variaţie de temperatură Δt°,

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta t^\circ \quad (cm).$$

12. In cazul cînd o bară este slăbită prin găuri de nit, crestături etc., se va lua în formulele de dimensionare-verificare o secţiune netă A_n, la care s-a ţinut seama de slăbiri.

12.bis. In rezolvarea problemelor ce conţin nedeterminări(bara sau sisteme de bare conţinînd eforturi iniţiale; bare avînd secţiunile alcătuite din mai multe materiale cu proprietăţi elastice diferite, legate solidar; bare sau sisteme de bare avînd deformaţiile împiedicate de legături) se disting următoarele aspecte:

a. Aspectul static

Se scriu ecuaţiile de echilibru static.

b. Aspectul geometric

Se examinează modul în care se deformează bara sau sistemul de bare considerat.

c. Aspectul fizic

Se exprimă deformaţia în funcţie de forţele care au produs-o (legea lui Hooke)

13. Problemele static nedeterminate pot fi rezolvate prin metoda rezistenţelor admisibile (metoda de calcul în stadiul elastic) sau metoda capacităţii portante (metoda de calcul în stadiul plastic). Această ultimă metodă considerată drept sarcină de rupere, sarcină pentru care întreaga construcţie, în ansamblu, ajunge la starea de curgere.

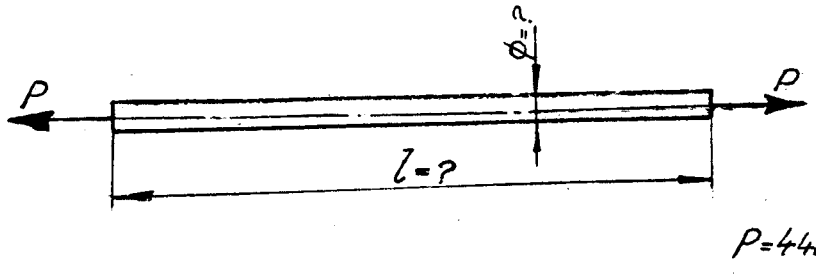


Fig. 1

1.1. Un tirant din oţel rotund OL38 este întins cu o forţă P = 4,4o T şi poate avea o alungire maximă $\Delta l \leq 2$ mm. Ce diametru şi lungime poate avea tirantul ?

- Aflăm diametrul din condiţiile de rezistenţă limită

$$\frac{P}{A} = \sigma_{adm}$$

Ştim că: $\sigma_{adm} = 1\,4oo$ kG/cm^2

Deci,

$$A_{nec} = \frac{4\,4oo}{1\,4oo} = 3,14 \text{ cm}^2$$

$$\frac{\pi d^2}{4} = 3,14; \qquad \underline{d = 2,o \text{ cm}}$$

- aflăm lungimea din condiţia de deformaţie limită:

$$\frac{Pl}{Ea} = \Delta l_{max}$$

Ştim că: $\Delta l_{max} = o,2$ cm

Deci,

$$l = \frac{2,1 \times 1o^6 \times 3,14 \times o,2}{4\,4oo} = 3oo \text{ cm}$$

$$\underline{l = 3,oo \text{ m}}$$

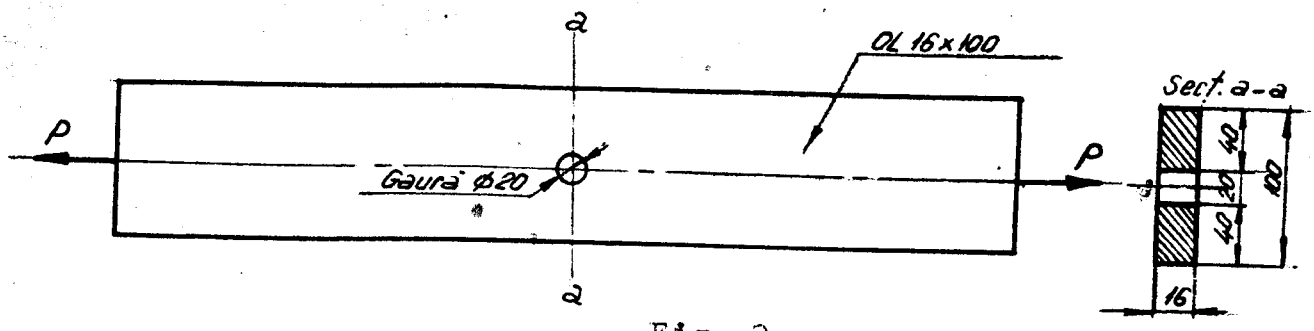


Fig. 2

1.2. Să se afle forţa $P_{maximă}$ care poate întinde bara de oţel cu secţiunea 16 x 100 mm, care are o gaură de nit ϕ 20 mm

- Sarcina capabilă se determină din condiţia de rezistenţă limită, cu formula:

$$P_{cap} = A_{net} \times \sigma_{adm}$$

$$A_{net} = 2 \times 4 \times 1,6 = 12,8 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{adm} = 1,400 \text{ kG/cm}^2$$

Deci,

$$P_{cap} = 12,8 \times 1,400 = 17,900 \text{ kG}$$

Observaţie:

In dreptul găurii, în diagrama eforturilor "σ" , se produce o concentrare locală (la marginea găurii 3σ) conf. fig. alăturată. Oţelul moale este un material plastic prin excelenţă, de aceea conform celor arătate la teorie vom folosi tot formula generală:

$\sigma = \frac{P}{A}$ (ca într-o secţiune curentă, cu observaţia că introducem secţiunea netă ($A = A_{net}$).

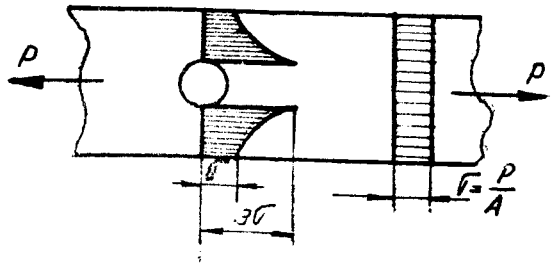


fig. 3

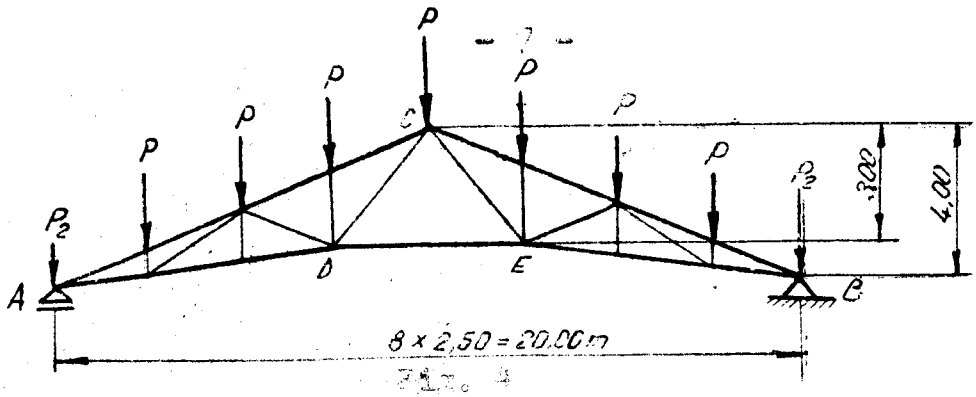


Fig. 4

1,5. Se dă ferma cu zăbrele (grinda)= fig. de mai jos, încărcată la nodurile tălpii superioare cu sarcina P = 4t.

Să se găsească secţiunea (din două profile -cornier) a tirantului D E.

- Determinarea reacţiunilor

Datorită simetriei ce există atât a schemei geometrice a fermei, reacţiunile vor fi egale între ele, $R_a = R_b = \frac{4T \times 12P}{2} = 24T$

- Determinarea diagramei de moment.

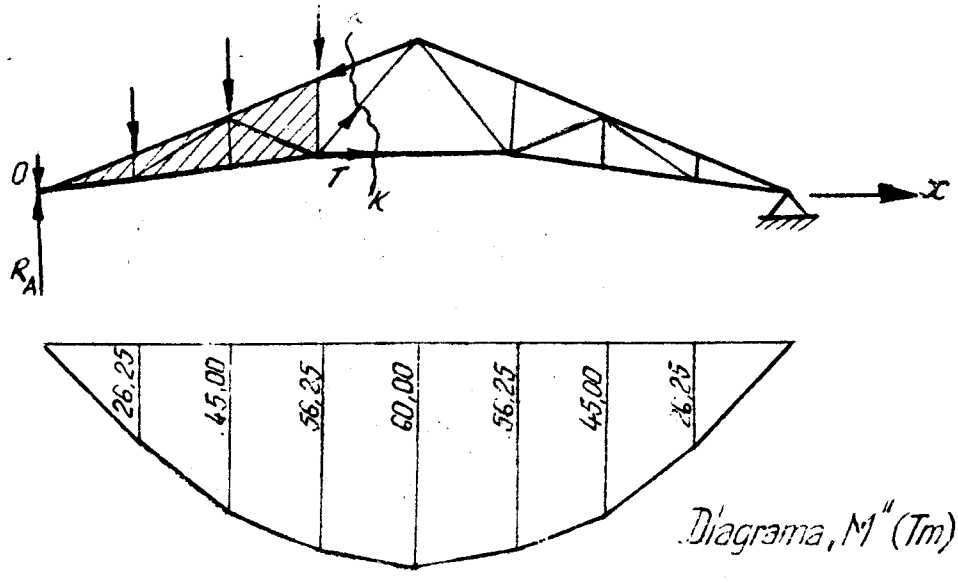


Fig. 5

Considerăm grinda cu zăbrele ca un bot (grinda simplă), încărcată cu sarcinile din figură.

Axa "x" este orizontală, originea în punctul A.

Momentele, în secţiunile din dreptul forţelor, vor fi:

$M_{(x=0)} = 0$

$M_{(x=2,50)} = 24 \times 2,50 = 10,50 \times 2,50 = 26,25$ Tm

$M_{(x=+5,00)} = 10,50 \times 5,00 - 3 \times 2,50 = 45,00$ Tm

$M_{(x=+7,50)} = 10,50 \times 7,50 - 3(5,00+2,50) = 56,25$ Tm

$M_{(x=+10,00)} = 10,50 \times 10 - 3(7,50 + 5,00+2,50) = 60,00$ Tm

Facem o secţiune verticală "K - K" şi separăm grinda în 2 corpuri- Punînd solicitările în tirant (T), în talpa superioară (AC) şi diagonala (CD) corpul I (din stînga) trebuie să fie în echilibru.

Momentul în punctul C al tuturor forţelor de la stînga (de pe corpul I), trebuie să fie nul (metoda Rittex).

Deci, st.

$$M_C = 0$$

$$+ M_{(x=+\ 1c,co)} - T \times 3,co = 0$$

Rezultă: $T = \frac{6o,co}{3,o5} = 2o\ T$ (tensiune)

- Aria necesară pentru a prelua sarcina axială T (nu vom ţine seama de slăbiri - pentru că grinda este sudată), este:

$$A_{nec} = \frac{T\ (kG)}{\sigma_a\left(\frac{kG}{cm^2}\right)} = \frac{2o\ ooo}{1\ 4oo}$$

$$A_{nec} = 14,3o\ cm^2$$

- Alegem din tabelele de corniere (STAS 424-49) o secţiune din 2 corniere cu aripi egale:

2 L 6o x 6o x 6

$A_{efectiv} = 13,82\ cm^2 = A_{nec} - 3\%\ A_{nec}$

Se admite o diferenţă în minus de maximum 5%

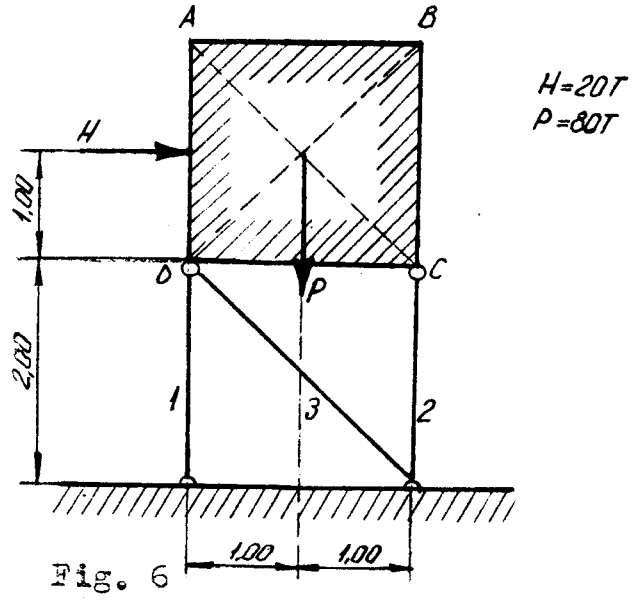


Fig. 6

1.4. Construcţia rigidă ABCD este sprijinită de stîlpii 1 şi 2 şi de contrafişa 3, legate articulat (conf. fig. de mai sus.)

Construcţia susţine o greutate P = 8o T şi e încărcată lateral cu o presiune de 2o T.

./.

Să se dimensioneze stîlpii şi contrafişa din patru corniere cu aripi egale.

Se dă: $\sigma_{adm} = 1000 \frac{kG}{cm^2}$ (redus, pentru a avea în vedere şi fenomenul de flambaj)

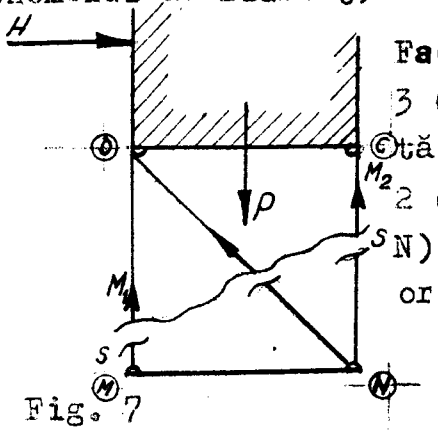


Fig. 7

Facem o secţiune fictivă prin barele 1, 2 şi 3 (S-S), restabilim continuitatea barelor tăiate punînd forţele M_1, M_2, D_3 şi scrim 2 ecuaţii de moment (în articulaţiile D şi N) şi o ecuaţie de echilibru forţelor pe orizontală (fig. alăturată)-

- Momentul forţelor în articulaţia din D

$$M_x \times 2 = 80 \times 1 + 20 \times 1 = 100 \text{ Tm}$$

$$M_2 = 50 \text{ T.}(-)$$

- Dimensionăm

$$A_{nec} = \frac{50\,000}{1\,000} = 50 \text{ cm}^2$$

Alegem: $4\,\text{L}\ 80 \times 80 \times 8$

$$A_{ef} = 4 \times 12{,}3 = 49{,}3 \text{ cm}^2 \cong A_{nec}$$

- Momentul forţelor în articulaţia din N

$$M_1 \times 2 + 20 \times 3 = 80 \times 1$$

$$M_1 = 10 \text{ T. } (-)$$

- Dimensionăm stîlpul 1,

$$A_{nec} = \frac{10\,000}{1\,000} = 10 \text{ cm}^2$$

Alegem din tabela anexată.(STAS 424-49)

$4\,\text{L}\ 35 \times 35 \times 4$

$$A_{ef} = 4 \times 2{,}67 = 10{,}62 \text{ cm}^2 > A_{nec}$$

- Echilibrul forţelor pe orizontală

$$D_3 \cdot \cos 45^\circ = H$$

$$D_3 = 20 \times 1{,}41 = 28{,}2 \text{ T}$$

- Dimensionăm contrafisa 3 (ND),

$$A_{nec} = \frac{28\,200}{1\,000} = 28{,}2 \text{ cm}^2$$

Alegem $4\,\text{L}\ 60 \times 60 \times 6$

$$A_{ef} = 4 \times 6{,}91 = 27{,}64 \text{ cm}^2 \cong A_{nec}$$

Eroarea în minus este de 2% - admisibil.

./.

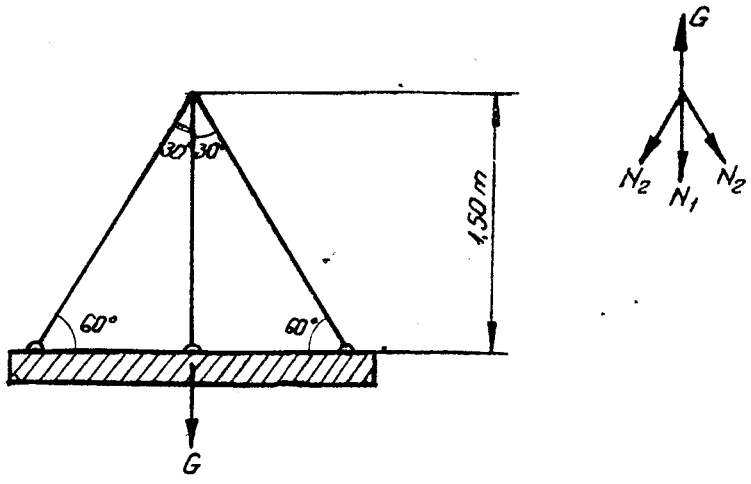


Fig. 8

1.5. Să se dimensioneze din oţel beton sistemul de agăţare a unui panou (G=6 tone) de cîrligul macaralei după cele 2 metode de calcul:

1. Metoda de calcul în domeniul elastic (metoda rezistenţelor admisibile)

2. Metoda de calcul în domeniul plastic (metoda sarcinilor admisibile).

1. Avem un sistem static nedeterminat. Presupunem că cele 3 bare au aceiaşi arie "A". Bara centrală este cea mai solicitată ($N_1 > N_2$).

- Scriem echilibrul forţelor, la cîrligul macaralei, pe verticală:

$$N_1 + 2N_2 \cdot \cos 30^0 = G \qquad (1)$$

$$N_1 + 1{,}73\, N_2 = 6 \text{ (aspectul static)}$$

- Intre alungirile celor 3 tije există relaţia dedusă la problema nr. I - 17.

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 \cdot \cos\alpha \text{ (aspectul geometric)}$$

- Inlocuim deformaţiile cu eforturi.

$$\frac{N_2 l_2}{E.A} = \frac{N_1 l_1}{E.A.} \cos 30^0 \text{ (aspectul fizic)}$$

Dar, $l_1 = l_2 \cos 30^0$

$$N_2 = N_1 \cos^2 30^0 \quad (2)$$

Introducem valoarea lui N_2 în ecuaţia (1)

$$N_1 (1+2\cos^3 30^\circ) = G$$

$$N_1 = \frac{G}{1+2\cos^3 30^\circ} = \frac{6\,000}{1+2\times(0,865)^3} = 2.610 \text{ kG}$$

La limită, în bara cea mai solicitată se atinge rezistenţa admisibilă. Dimensionăm:

$$A_{nec} = \frac{N_1}{\sigma_a} = \frac{2\,610}{1\,400} = 1,87 \text{ cm}^2$$

Alegem ϕ 16 mm

Acelaşi arie o alegem şi pentru barele marginale. Ele vor fi supradimensionate.

2. Presupunem că după ce în bara centrală s-a ajuns la limita de curgere ($A_1 < 1,56$ cm^2), această bară nu se mai încarcă cu efort, dar în schimb cresc eforturile unitare în barele marginale pînă la limita de curgere.

Toate barele vor fi la fel solicitate (nu vom mai avea supradimensionări).

La limită, sarcina G trebuie să nu depăşească o valoare admisibilă (metoda sarcinii admisibile).

$$G \leqslant P_a = \frac{P_{curg}}{C}$$

Scriem o ecuaţie de echilibru pe verticală:

$$P_{curg} = A\sigma_c + 2A\sigma_c \cos 30^\circ = A\sigma_c (1+2\cos 30^\circ).$$

Rezultă,

$$G = \frac{\sigma_c}{C} \cdot A \cdot (1+2\cos 30^\circ)$$

Dar, $\frac{\sigma_{curg}}{C} = \sigma_{adm} = 1\,400 \frac{kG}{cm^2}$

- Dimensionăm,

$$A_{nec} = \frac{G}{\sigma_a(1+2\cos 30^\circ)} = \frac{5\,000}{1\,400 \times 2,73} = 1,31 \text{ cm}^2$$

Această mărime este mai mică decît cea obţinută prin metoda de calcul obişnuită (în domeniul elastic, de la pct. 1):

$$\frac{G}{\sigma_a(1+2\cos^3 30^\circ)}$$

Alegem ϕ 14 mm

Prin această metodă de calcul se utilizează complet rezistenţa sistemului static nedeterminat şi se realizează o rezistenţă efectiv egală a tuturor barelor.

./.

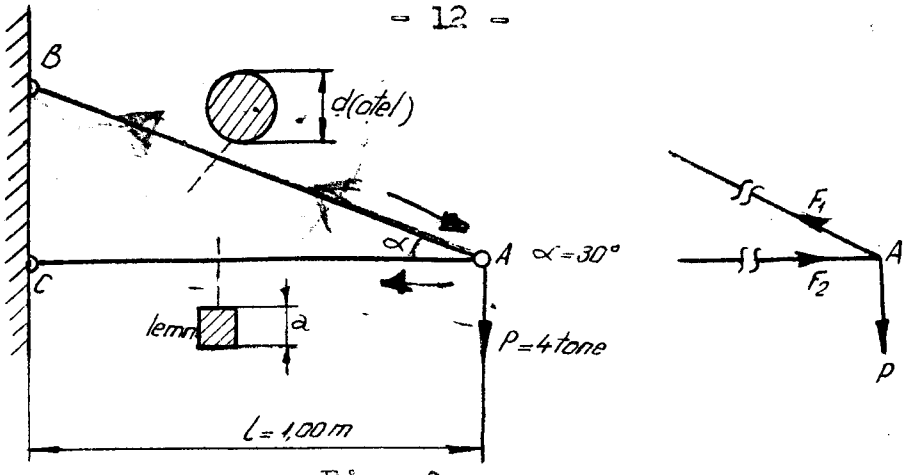


Fig. 9

1.6. Consola ABC susţine o greutate P = 4 tone

Ea este formată dintr-o bară de lemn (AC) şi un tirant de oţel (AB). Să se afle latura haşei (a) şi diametrul tirantului (d) şi deplasarea punctului A.

Se dă rezistenţa admisibilă pentru lemn, la compresiune: $\sigma_a = 35 \frac{kg}{cm^2}$ (rezistenţă redusă, pentru a ţine seama de posibilitatea pierderii stabilităţii. Vezi cap. IX) şi rezistenţa admisibilă a oţelului la tensiune: $\sigma_a = 1\,400 \frac{kg}{cm^2}$

- Determinarea forţelor F_1 şi F_2 din tirant, respectiv bara de lemn. Scriem condiţia de echilibru a nodului A pe verticală şi orizontală.

Rezultă $F_1 = \frac{P}{\sin 30^o} = 2P = 8\ T\ (+)$

$F_2 = F_1 \cos 30^o = 2P \times \frac{\sqrt{3}}{2} = P\sqrt{3} = 6{,}93\ T.\ (-)$

- Ariile necesare pentru secţiunile transversale ale barelor AB şi AC

$$A_1 = \frac{F_1}{\sigma_{at}} = \frac{8\,000}{1\,400} = 5{,}7\ cm^2$$

$$A_2 = \frac{F_2}{\sigma_{ac}} = \frac{6\,930}{35} = 199\ cm^2$$

Diametrul tirantului şi latura pătratului sînt

$$d = \sqrt{\frac{4A_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 5{,}7}{3{,}14}} = 2{,}7\ cm = 27\ cm$$

$$a = \sqrt{A_2} = \sqrt{199} = 14{,}2\ cm$$

Alegem: a = 15 cm

./.

Deformaţiile barelor

a) pentru bara AB: $\Delta l_1 = \frac{F_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1}$ (alungire)

$$\Delta l_1 = \frac{8\,000 \times 116}{2{,}1 \times 10^6 \times 5{,}7} = 7{,}73 \times 10^{-2} \text{ cm}$$

b) pentru bara AC: $\Delta l_2 = \frac{F_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2}$ (scurtare)

$$\Delta l_2 = \frac{6\,930 \times 100}{10^5 \times 225} = 3{,}08 \times 10^{-2} \text{ cm.}$$

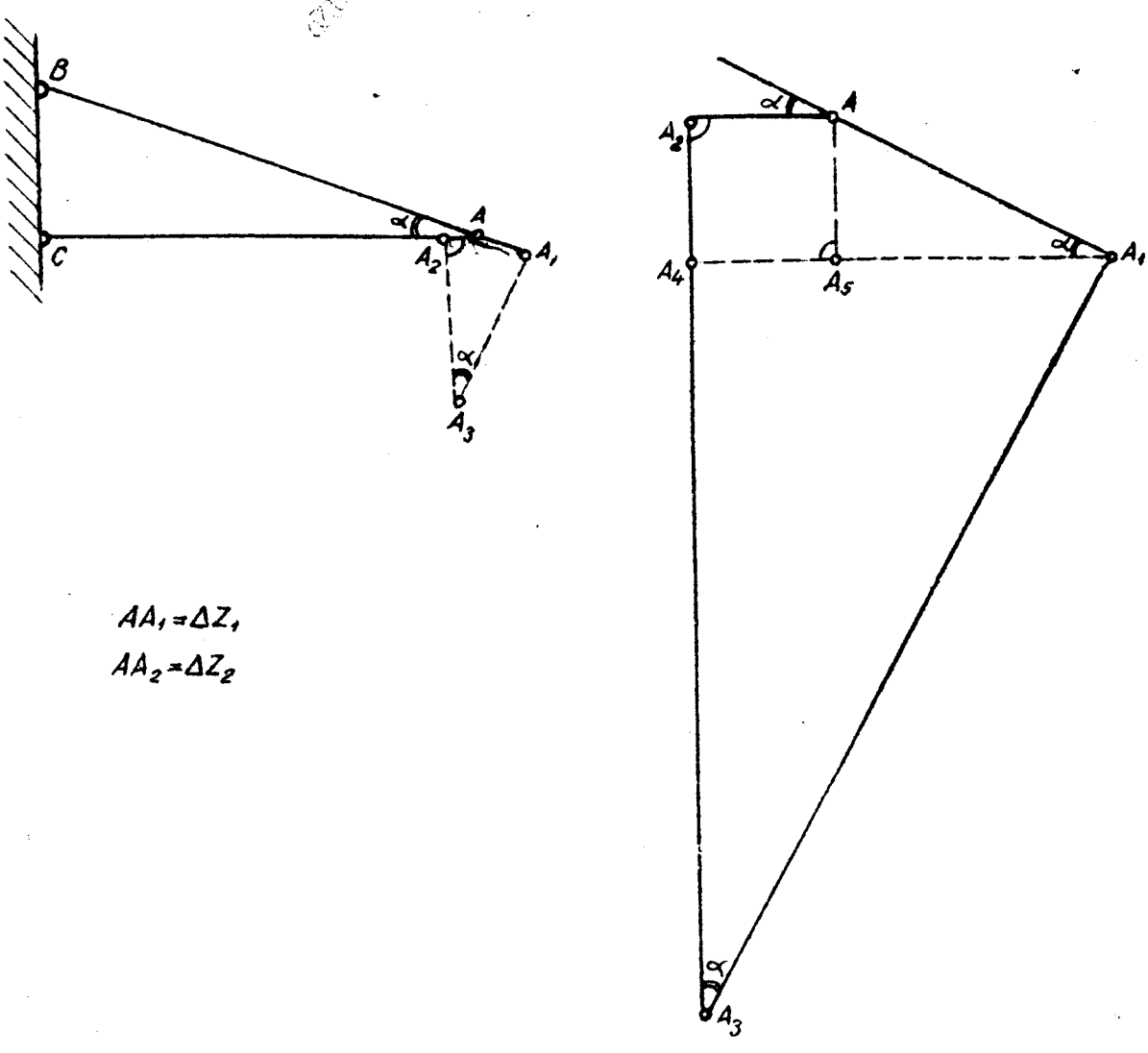


Fig. 10.

Presupunem că barele s-ar putea deforma liber, (nu ar fi legate în punctul A) conform cu fig. de mai sus.

Pentru a găsi noua poziţie a punctului A, unim barele deformate - rotindu-le în jurul punctelor B şi C.

./.

Aproximăm arcele de cerc A_1A_3, respectiv A_2A_3 (f. mici) cu drepte perpendiculare.

- Deplasarea orizontală va fi chiar Δl_2

$$f_o = AA_2 = \Delta l_2$$

- Deplasarea verticală:

$$f_v = A_2A_3 = A_2A_4 + A_4A_3$$

$$A_2A_4 = AA_5 = \Delta l_1 \sin\alpha$$

$$A_4A_3 = A_1A_4 \operatorname{ctg}\alpha$$

Insă, $A_1A_4 = A_1A_5 + A_5A_4 = \Delta l_1 \cos\alpha + \Delta l_2$

Deci, $A_4A_3 = \dfrac{\Delta l_1 \cdot \cos^2\alpha + \Delta l_2 \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha}$

Rezultă: $f_v = \dfrac{\Delta l_1 + \Delta l_2 \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha}$

Inlocuind numeric, obţinem:

$$f_o = 3{,}08 \times 10^{-2} \text{ cm.}$$

$$f_v = \frac{2{,}75 + 3{,}08 \times 0{,}86}{0{,}5} \times 10^{-2} = 0{,}208 \text{ cm}$$

- Deplasarea totală ($AA_3^{0,5}$) este:

$$f = \sqrt{f_o^2 + f_v^2} = \sqrt{0{,}308^2 + 2{,}08^2} = 2{,}11 \text{ m}$$

1.7. Se dă stîlpul tubular din fontă /d=0,8 D/ ce reazemă pe o placă intermediară cu secţiunea patrată din acelaş material ($\gamma_f = 7{,}25 \frac{kG}{dm^3}$; $\sigma_{af} = 700 \frac{kG}{cm^2}$ - redusă, pentru a ne asigura la flambaj) şi fundaţia de beton simplu /B_{25}/, cu secţiunea patrată ($\gamma_b = 2{,}2 \frac{kG}{dm^3}$; $\sigma_{ab} = 40 \frac{kG}{cm^2}$)

Să se dimensioneze sistemul, cunoscînd că este comprimat cu o forţă $N = 30$ T

Se cunosc: $\sigma_{a\ teren} = 3 \frac{kG}{cm^2}$

$h_3 = 1{,}0$ m; $h_p = \frac{b}{4}$; $h_f = 2{,}0$ m

./.

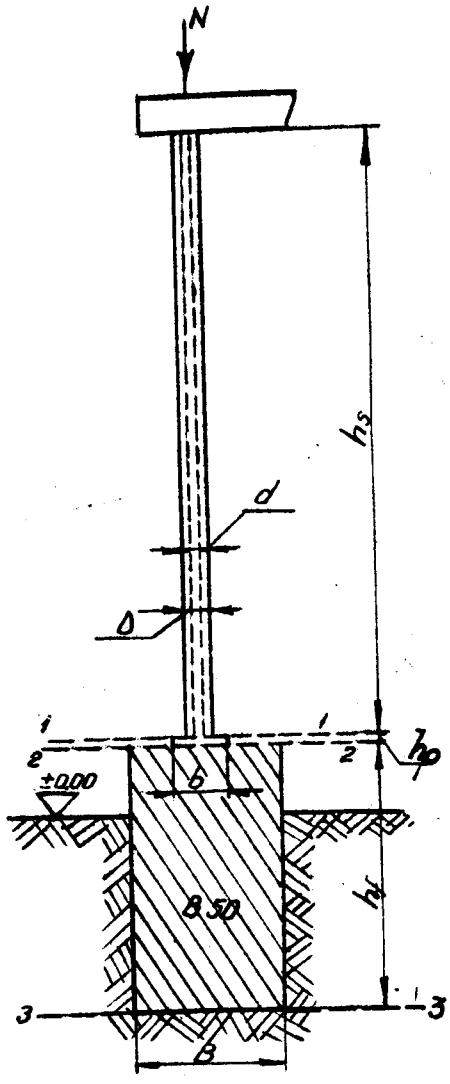


Fig. 11

e. Dimensionarea stîlpului se face în secţiunea 1 -1, unde rezistenţa proprie e maximă. In secţiunea periculoasă, nu trebuie să depăşim rezistenţa admisibilă a fontei. La limită, avem:

$$\sigma_{af} \frac{N + \gamma_f \cdot h_s \cdot A_{nec}}{A_{nec}}$$

$$A_{nec} = \frac{3\,000}{700 - 7{,}25 \cdot 10^{-2} \cdot 400} = 43 \text{ cm}^2$$

$$\frac{\pi}{4}\left[D^2 - (0{,}8\,D)^2\right] = 43$$

$$D \sim \quad \text{cm} \; ; \qquad d \sim 10 \text{ cm}$$

Se observă că greutatea proprie a stîlpului (125 kG) este neglijabilă față de sarcina N (3o T).

b. Placa de fontă are rolul de a mări suprafața prin care stîlpul apasă pe beton, astfel încît efortul unitar ce apare, să fie mai mic decît rezistența admisibilă a betonului.

Deci, în secțiunea 2-2:

$$A_{nec} = \frac{N + G_{stîlp}}{\sigma_{ab} - \gamma_f \cdot h_p}$$

Putem neglija greutatea proprie a plăcii.

$$b^2 = \frac{3o\,ooo + 125}{4o} = 753 \text{ cm}^2$$

$b = 27,4o$ cm — alegem $b = 27,5o$ cm

$h_p = 6,85$ cm — alegem $h_p = 7$ cm

Greutatea plăcii: $7,25 \cdot 1o^{-3} \cdot 7 \cdot 27,5^2 = 38,2o$ kG

c. Secțiunea fundației de beton se calculează astfel ca la cpntactul cu terenul (în sct.3-3), să nu depășim rezistența admisibilă a pămîntului.

$$A_{nec} = \frac{N + G_{stîlp} + G_{placă}}{\sigma_{at} - \gamma_b \cdot h_{fund}}$$

$$B^2 = \frac{3o.ooo + 125 + 38}{3 - 2,2.1o^{-3} \cdot 2oo} = 11\,8oo \text{ cm}^2$$

$B \cong 11o$ cm (rotund)

Verificare: efortul unitar efectiv pe teren, este:

$$\sigma_{ef} = \frac{3o\,ooo + 125 + 38 + 5\,33o}{12\,1oo} = 2,93 \frac{kG}{cm^2} < 3.$$

./.

135-41

1.9. Secţiunea longitudinală printr-un bloc de locuinţe individuale muncitoreşti, este cea din fig. de mai jos.

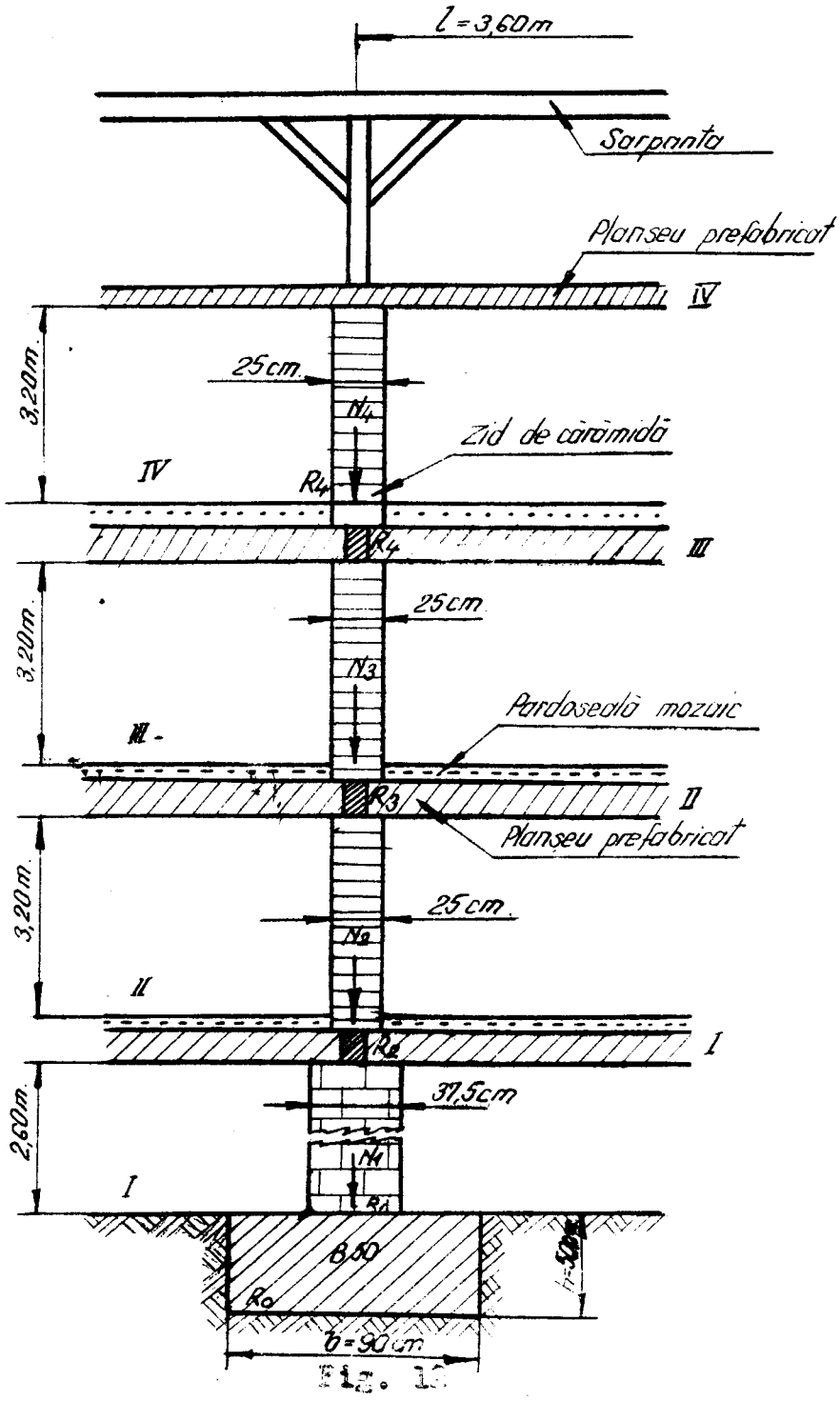


Fig. 1

1. Să se dimensioneze zidul median de cărămidă, pe fiecare etaj.

2. Să se dimensioneze fundaţia zidului.

Se dă:

- rezistenţa admisibilă a zidăriei : σ_a = 6 $\frac{kg}{cm^2}$
- rezistenţa admisibilă a terenului: σ_a = 2,5 $\frac{kg}{cm^2}$

Rezistenţa admisibilă la compresiune a zidăriei de cărămidă este mai mică decît a betonului (planşeu prefabricat). De ceea, în rosturile (R_1,R_2,R_3,R_4) dintre zidărie şi planşeu vom verifica ca să reziste cărămidă la sarcina ce-i revine din încărcarea de deasupra. Punînd această condiţie, vom dimensiona zidăria.

a) Dimensionarea zidului IV.

- Il alegem de 25 cm (o cărămidă); calculăm pentru 1 metru liniar. Deci,

$$A = 100 \times 25 = 2.500 \text{ cm}^2$$

- Evaluarea sarcinei de deasupra. (Se va consulta normativul CSCAS de încărcări)

- învelitoarea (2 rînduri de ţiglă solzi)	95 $\frac{kG}{m^2}$
- şarpanta (lemn)	35 "
- izolaţia termică (zgură 10 cm)	220 "
- zăpada	75 "
- planşeu prefabricat IV	400 "
- sarcină utilă (în pod)	150 "
p =	975 $\frac{kG}{m^2}$

$$p/_{ml} = 975 \times 3,60 = 3.150 \text{ kG}$$

zidăria IV cu tencuială, ţinînd seama de goluri (15%):

$$0,85 \times 0,30 \times 3,20 \times 1.800 = 1\,465 \frac{kG}{ml}$$

Calculăm pentru 1 ml. Deci, N_4 = 4 975 kGTotal 4 975 $\frac{kG}{ml}$

Verificarea rezistenţei(în rostul R4) :

$$\sigma_{efectiv} = \frac{N4}{A} = \frac{4\,975}{2\,500} = 2 \frac{kg}{cm^2} < \sigma_{adm.}$$

Dimensionarea zidului IV de 25 cm este bine aleasă.

b) Dimensionarea zidului III.

- Il alegem tot de o cărămidă:

$$A = 2.500 \text{ cm}^2$$

- Sarcina axială (N_3) în secţiunea periculoasă (la bază), este:

- planşeu prefabricat III	460 kG/mp
- pardoseala (mozaic)	110 "
- pereţi despărţitori (150) cu tencuială (30)	180 kG/mp
- sarcină utilă	200
p =	950 kG/mp

$$p/_{ml} = 950 \times 3,35 = 3\,180 \text{ kG/ml}.$$

/.

. peretele (III), ţinînd cont de slăbiri (15%):

0,85 x 0,30 x 3,20 x 1 800 = 1465 kG/ml

. sarcina de la nivelul superior

4 975 kG/ml

Total : 9 620 kG/ml. (N_3= 9 620 kG

Verificarea în rostul R_3:

$$\sigma_{ef} = \frac{N_3}{A} = \frac{9\,620}{2\,500} = 3,85 \ \frac{KG}{cm^2} < \sigma_{adm}.$$

c) Dimensionarea zidului II.

- Îl alegem de 25 cm (A=25 x 100 = 2 500 cm^2)
- Sarcina axială (N_2), în secţiunea periculoasă (R_2):
. sarcina de la nivelul superior (N_3): 9 620 kG
. planşeu II, pardoseala, sarcina utilă etc (p): 3 180 kG
. zidul II: 0,85 x 0,30 x 3,20x 1800 x 1,00 = 1 465 kG

N_2 = 14 265 kG

Verificarea dimensiunii alese (25 cm) în secţiunea periculoasă:

$$\sigma_{ef} = \frac{N_2}{A} = \frac{14\,265}{2\,500} = 5,7 \ \frac{kG}{cm^2} < \sigma_{adm} = 6 \ \frac{kG}{cm^2}$$

d) Dimensionarea zidului I.

- Evident că o zidărie din o cărămidă (25 cm) nu ar mai ţine. Alegem zidăria de 37,5 cm.

Rezultă,

A_1 = 37,5 x 100 = 3 750 cm^2

- Sarcină axială (N_1) în secţiunea periculoasă (R_1)
. sarcina de la nivelul superior (N_2): 14 265 kG
. planşeu (I), pardoseala, sarcina utilă etc (p): 3 180 kG
. zidul (I), cu tencuieli fără goluri:

0,42 x 2,60 x 1,00 x 1 800 = 1 960 kG

N_1 = 19 405 kG

Verificarea la rostul R_1 (dintre zidărie şi blocul de fundaţie):

$$\sigma_{ef} = \frac{N_1}{N_1} = \frac{19\,405}{3\,750} = 5,2 \ \frac{kG}{cm^2} < \sigma_{adm}$$

e) Dimensionarea fundaţiei

Sub zidul (I) vom executa o fundaţie continuă de beton simplu (B50). Adîncimea minimă de fundare, pentru fundaţiile zidurilor exterioare - din condiţiile de îngheţ, este de 80 cm.

./.

[illegible] avem un zid interior; alegem:

$$h = 5o \text{ cm}$$

Lăţimea fundaţiei o alegem: b = 9o cm

Verificăm: (pentru un metru liniar de fundaţie)

$$A_s = 9o \times 1oo = 9 \text{ ooo cm}^2$$

$$N = N_1 + G_{fund.}$$

$$G = o,9o \times 1,2o \times 2,5o \times 1 \; 2oo = 9.72o \text{ kG}$$

$$N = 19 \; 1o5 + 9.72o = 29 \; 395 \text{ kG}$$

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A_s} = \frac{29\,395}{9\,000} = 3,27 \; \frac{kG}{cm^2} < \sigma_{adm} = 2,5.$$

Rezultă că dimensiunile sînt bine alese.

1.9. Se dă bara lubiu articulată, de secţiune constantă, încărcată ca în fig. de mai jos:

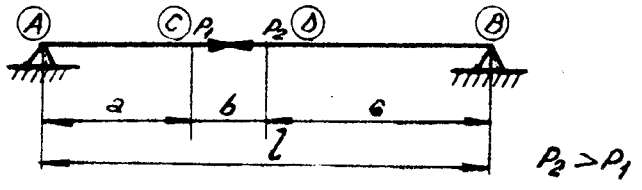


Fig. 13

Se cere:

1. Să se determine reacţiunile din articulaţii.
2. Să se construiască diagrama forţelor axiale.

Aplicaţie numerică: $P_1 = 2T$, $P_2 = 6T$.

a= 2 m, b= 1 m, c= 3 m.

5. Să se dimensioneze bara.

Aplicăm principiul suprapunerii efectelor.

Considerăm bara încărcată numai cu forţa P_1.

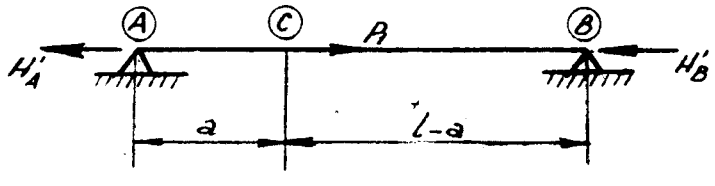


Fig. 14

a. Aspectul static.

In articulaţie apar reacţiunile. (H'_A şi H'_B).

Scrim echilibrul pe orizontală:

$$H'_A + H'_B = P_1 \qquad (1)$$

b. Aspectul geometric.

Deformaţia totală a barei AB este nulă cu cît se alungeşte bara AC, cu atît se scurtează bara BC

Deci,

$$\Delta l_{AC} = \Delta l_{CB}$$

c. Aspectul fizic.

Inlocuim deformaţiile (Δl) cu eforturi ($\sigma = \frac{H}{A}$) folosind legea de proporţionalitate a lui Hooke.

$$\frac{H'_A \, a}{EA} = \frac{H'_B (l-a)}{EA} \qquad (2)$$

Avem un sistem de 2 ecuaţii (1) şi (2), cu 2 necunoscute (H'_A şi H'_B). Il rezolvăm.

Rezultă:

$$H'_A = P_1 \times \frac{l-a}{l} = P_1 \times \frac{b+c}{l}$$

$$H'_B = P_1 \times \frac{a}{l}$$

- Diagrama sarcinilor axiale (N) pe bară.

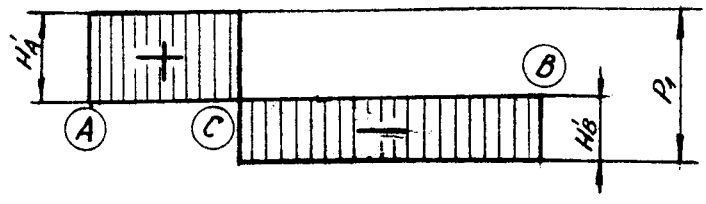


Fig. 15

Observăm că valorile de mai sus, pentru H'_A şi H'_B, ca şi diagrama "N" le obţinem la fel ca în cazul cînd grinda ar fi simplu rezemată şi încărcată cu sarcina P_1 - în punctul c - normal pe axă.

Diagrama "T" (forţa tăietoare) din grinda analoagă - reprezintă diagrama "N" (sarcină axială) din grinda reală.

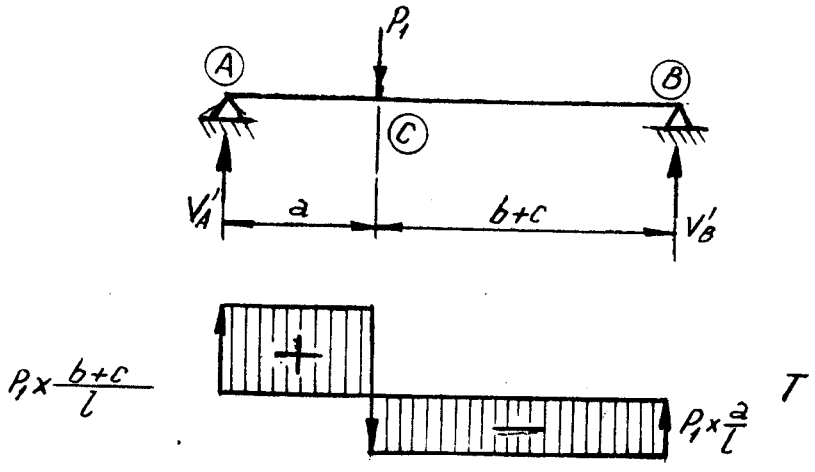


Fig. 16

- Considerăm bara încărcată numai cu forţa P_2 (fig. de mai jos)

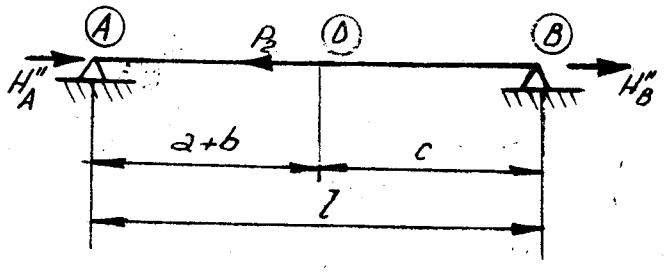


Fig. 17

Similar cu primul caz, deducem valoarea reaţiunilor:

$$H''_A = P_2 \times \frac{b}{l}$$

$$H''_B = P_2 \times \frac{a+b}{l}$$

Suprapunem efectele: (ştim că: $P_2 > P_1$; $c > a > b$) (fig. ce urmează):

./.

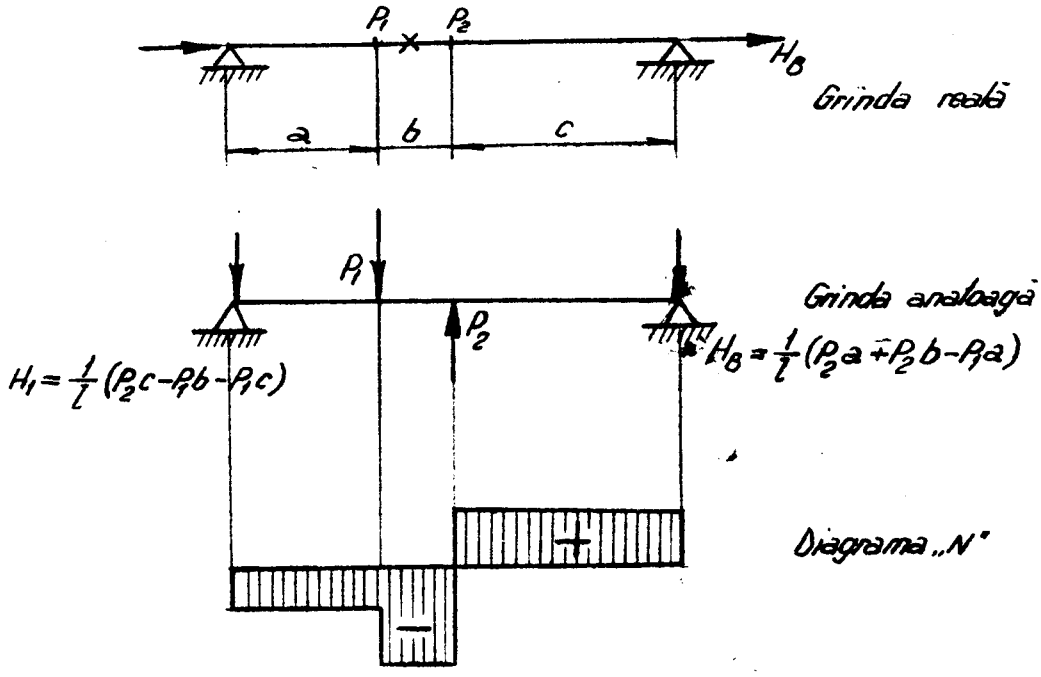


Fig. 18

Aplicaţie numerică.

$$\text{2T pe grindă, forţa} \begin{cases} H'_A = 2 \times \frac{1+2}{6} = \frac{4}{3} \text{ T} \\ H'_B = 2 \times \frac{2}{6} = \frac{2}{3} \text{ T} \end{cases}$$

$$\text{6T pe grindă, forţa} \begin{cases} H''_A = 6 \times \frac{3}{6} = 3 \text{ T} \\ H''_B = 6 \times \frac{3}{6} = 3 \text{ T} \end{cases}$$

Rezultă reacţiunile orizontale (sensul este cel din fig. de mai sus)

$$\begin{cases} H_A = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} = 1{,}66 \text{ T} \\ H_B = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3} = 2{,}33 \text{ T} \end{cases}$$

2. Diagrama forţelor axiale este cea din fig- ce urmează

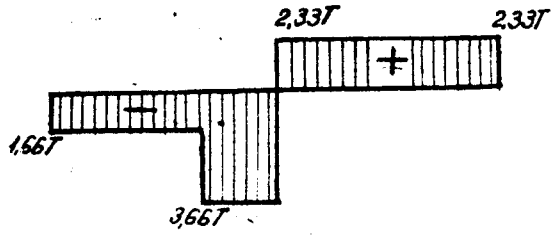


Fig. 19.

3. Dimensionăm bara din oţel beton, la efortul axial maxim.

$$A_{nec} = \frac{N_{max}}{\sigma_{adm}} = \frac{3\,660}{1\,400} = 2{,}62 \text{ cm}^2$$

Alegem oţel - beton ϕ 2o.

$A_{ef} = 3{,}14 \text{ cm}^2 > A_{nec}$.

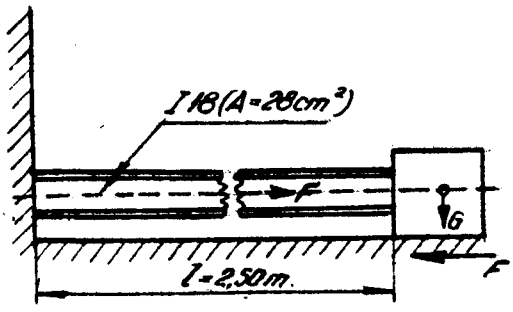


Fig. 2o

1.1o. La ce variaţie de temperatură trebuie să fie supus profilul metalic I 18, încastrat la un capăt - pentru a deplasa cu 3 mm greutatea G = 3 53o kG ?

Se dă coeficientul de frecare al corpului de postament - f = o,4.

In profilul metalic trebuie să se dezvolte o forţă "F" egală cu reacţiunea orizontală "F" (datorită frecării) ce ia naştere între greutate şi postament.

$$F = G \times f = 3\,53o \times o{,}4 = 14\,12o \text{ kg.}$$

- Efortul unitar în profil, produs de forţa "F":

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{14\,12o}{28} = 5o4 \text{ kg/cm}^2$$

- Variaţia de temperatură Δt_1 care produce acest efort unitar:

(Stim că: $\sigma = E. \alpha. \Delta t_1$.)

$$\Delta t_1 = \frac{5o4}{2{,}1 \times 1o^6 \times 12 \times 1o^{-6}} = 2o^o.$$

- Variaţia de temperatură Δt_2 (suplimentară) necesară dilatării libere a capătului profilului (şi a greutăţii) este:

(Stim că: $\Delta l = \alpha. l. \Delta t$)

$$\Delta t_2 = \frac{o{,}3}{12 \times 1o^{-6} \times 25o} = 1oo^o.$$

Variaţia de tenperatură "Δt" - totală -necesară, este:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2.$$

$$\Delta t = 12o^o.$$

./.

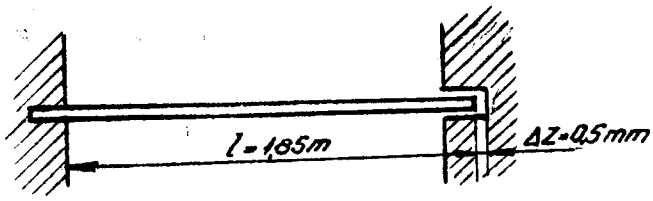


Fig. 21

1.11. O bară de oţel cu coeficientul de dilatare $\alpha = 12 \times 10^{-6}$, este astfel rezemată ca să poată dilata liber o,5 mm, după care dilatarea este împiedicată.

Ce rezistenţă se produce în bară la o creştere de tenperatură de 5o°C ?

Variaţia de temperatură "Δt_1" sub care bara se poate dilata liber (cu lungimea Δl):

$$\Delta l = \alpha . l . \Delta t .$$

$$\Delta t_1 = \frac{0,05}{12 \times 10^{-6} \times 185} = 22,5^{\circ}$$

Rezistenţa produsă de variaţia de tenperatură "Δt_2":

$\Delta t_2 = 5o - 22,5 = 27,5^{\circ}$.

$\sigma = 2,1 \times 10^{6} \times 12 \times 10^{-6} \times 27,5 = 694$ kG/cm^2.

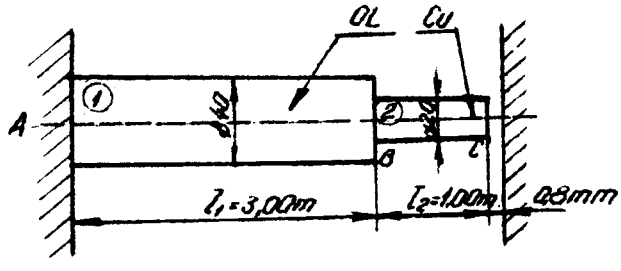


Fig. 22

1.12, Se dă ansamblul de 2 bare circulare de oţel şi cupru - ca în fig. de mai sus -

Intre capătul "C" al barei de cupru şi perete există un spaţiu de o,8 mm.

Stiind că temperatura barei de oţel creşte cu cantitatea $\Delta t = + 5o^{\circ}C$, să se afle eforturile unitare care apar în cele 2 bare.

./.

Bara de oţel se alungeşte datorită creştarii temperaturii. Cantitatea cu care s-ar alungi dacă ar fi liberă şi la capătul B.

$$\Delta l_{tot.} = 12 \times 10^{-6} \times 300 \times 50 = 180\,000 \times 10^{-6} = 0{,}15 \text{ cm} = 1{,}8 \text{ mm}.$$

Dar bara se poate alungi liber numai 0,8 mm.

Rămîne: $\Delta l = 1{,}80 - 0{,}80 = 1{,}00$ mm.

Ajungem la situaţia de mai jos: dacă bara (1) ar fi liberă, ea s-ar mai alungi şi cu cantitatea Δl_1^t.

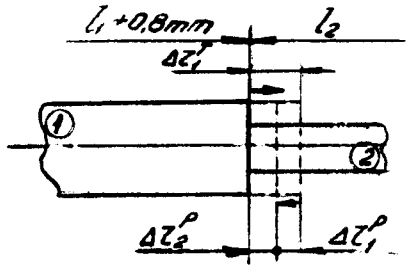


Fig. 25

Bara (2) se opune acestei tendinţe, la maşteme o forţă "P" de interacţiune care aduce înapoi bara de oţel cu cantitatea Δl_1^P şi comprimă bara de cupru cu cantitatea Δl_2^P

Deci,

$$\Delta l_1^t - \Delta l_1^P = \Delta l_2^P .$$

Înlocuind, obţinem:

$$0{,}10 = \frac{P \times 300}{2{,}1 \times 10^6 \times 12{,}6} + \frac{P \times 100}{1{,}15 \times 10^6 \times 3{,}14}$$

$$0{,}10 = P \times (11{,}4 \times 10^{-6} + 27{,}6 \times 10^{-6})$$

Rezultă,

$$P = \frac{0{,}10}{39 \times 10^{-6}} = \frac{100\,000}{39} = 2\,560 \text{ kg}$$

Eforturile unitare de compresiune vor fi:

$$\sigma_{OL} = -\frac{2\,560}{12{,}6} = -205 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{cu} = -\frac{2\,560}{3{,}14} = -820 \text{ kg/cm}^2$$

./.

1.13. Sistemul de 3 bare articulate, din oţel rotund ($\alpha = 12.10^{-6}$) este montat la temperatura $t_1 = +15^{\circ}C$.

Barele oblice au aceiaşi înclinare faţă de verticală ($\beta = 30^{\circ}$), diametrul lor este $\phi_1 = 2$ cm; diametrul barei verticale este $\phi_2 = 2{,}25$ cm.

Să se determine eforturile în bare, dacă temperatura ansamblului (în exploatare) creşte la $t_2 = +45^{\circ}C$.

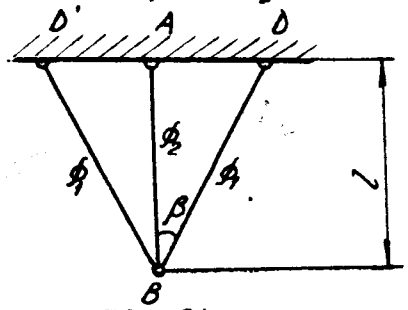


Fig.24

Datorită variaţiei de temperatură ($\Delta t = +30^{\circ}C$), barele se vor lungi. Dacă ar fi libere (şi nu articulate în B), barele s-ar alungi inegal (au lungimi diferite): bara BD mai mult, bara AB mai puţin.

Deoarece lungirea nu se face liber- vor apare solicitări interioare pe care le notăm N_1 şi N_2.

Deoarece sistemul este simetric, (barele laterale BD şi BD' sînt la fel înclinate şi de aceiaşi arie şi din acelaş material) articulaţia din B se deplasează pe verticală în C.

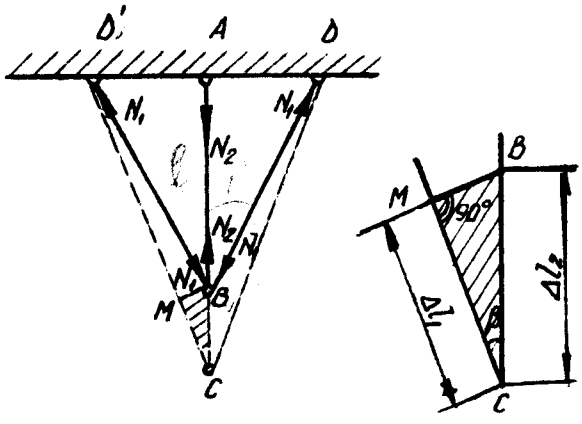


Fig. 25

Aproximînd că: $D'B \approx D'M$, scoatem relaţia dintre deformaţiile barelor (Δl_1 şi Δl_2)- studiul geometric:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos\beta \qquad (1)$$

Deformaţiile barelor reprezintă efectul temperaturii (Δt) şi al solicitărilor (N_1, N_2); astfel (studiul fizic):

$$(1') \quad \frac{1}{\cos\beta} \cdot \alpha \cdot \Delta t - \frac{N_1}{E \cdot A_1} \cdot \frac{l}{\cos\beta} = (l \cdot \alpha \cdot \Delta t + \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot A_2}) \cos\beta$$

Izolăm nodul B şi facem proiecţia forţelor pe verticală - studiul static:

$$N_2 = 2N_1 \cdot \cos\beta \qquad (2)$$

Rezolvînd sistemul de 2 ecuaţii [(1') şi (2)] cu 2 necunoscute (N_1 şi N_2), obţinem valoarea solicitărilor în bare:

$$N_1 = E \cdot A_1 A_2 \cdot \alpha \cdot \Delta t \cdot \frac{1 - \cos^2\beta}{A_2 + 2A_1 \cos^3\beta}$$

./.

$$N_2 \leq 2\,E \cdot A_2 \cdot A_1 \cdot \alpha \cdot \Delta t^\circ \cdot \frac{\cos\beta - 28 (1 - \cos^2\beta)}{A_2 + 2\,A_1 \cdot \cos^2\beta}$$

Inlocuind numeric, rezultă:

$N_1 = 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 3{,}14 \cdot 4{,}12 \cdot 10^{-6}\, 30^\circ \cdot \frac{3{,}25}{8{,}05} = 295$ kG

$N_2 = 2\,295 \cdot 0{,}818 = 483$ kG

Eforturile în bare:

$$\sigma_1 = \frac{295}{3{,}14} = 94 \ \frac{kG}{cm^2} \text{ (compresiune)}$$

$$\sigma_2 = \frac{483}{4} = 121 \ \frac{kG}{cm^2} \text{ (tensiune)}$$

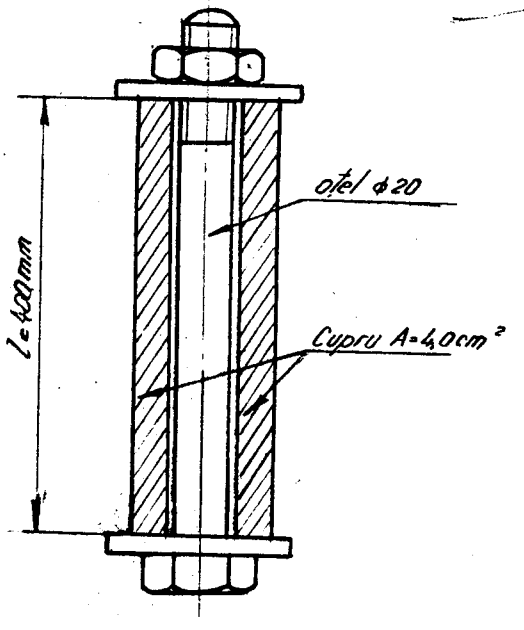


Fig. 26

1.14. Un bulon de oţel ϕ 2o strînge o ţeavă de cupru ($A = 4\ cm^2$) prin intermediul unei şaibe, astfel încît piuliţa e strînsă cu o optime de tură (pasul filetului este p=2,5o mm). Se cere:

1. Care este efortul unitar produs în bulon şi în ţeavă ?
2. Care sînt noile eforturi unitare, dacă temperatura creşte cu cantitatea $\Delta t = 3o^\circ C$?

Se dă: $E_{cu} = 1{,}15 \cdot 10^6 kg/cm^2$,

$\alpha_{cu} = 17 \cdot 10^{-6}$,

$E_{ol} = 2{,}1 \cdot 10^6 kg/cm^2$,

$\alpha_{OL} = 12 \cdot 10^{-6}$.

1. Prin strîngerea piuliţei, şaiba merge în jos şi comprimă ţeava; bulonul se lungeşte (este întins). Suma deformaţiilor celor 2 piese reprezintă deplasarea cu o jumătate de tură a piuliţei.

Forţa de interacţiune necunoscută este "N". Deci,

$$\frac{N \cdot l}{E_{cu} \cdot A_{cu}} + \frac{N \cdot l}{E_{ol} \cdot A_{ol}} = \frac{p}{8}$$

Unde, $A_{ol} = 3{,}14\ cm^2$ şi $A_{cu} = 4{,}o\ cm^2$

$$N = \frac{p}{8l} \cdot \frac{1.15 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 3{,}14}{1.15 \cdot 10^6 \cdot 4 + 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 3{,}14} = 2.11o\ kg.$$

./.

Eforturile unitare în cele 2 piese:

$$\sigma_{cu} = -\frac{211o}{4,o} = -527 \quad \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma_{OL} = +\frac{211o}{3,14} = +670 \quad kg/cm^2$$

2. Considerăm ansamblul nesolicitat. Dacă ţeava şi bulonul ar fi independente, în urma creşterii temperaturii cu cantitatea + Δ t - cupru se alungeşte (Δl_1^{cu}) cu mai mult decît oţelul (Δl_1^{OL}) deoarece $\alpha_{cu} > \alpha_{OL}$

(Vezi pe figura ce urmează, faza I)

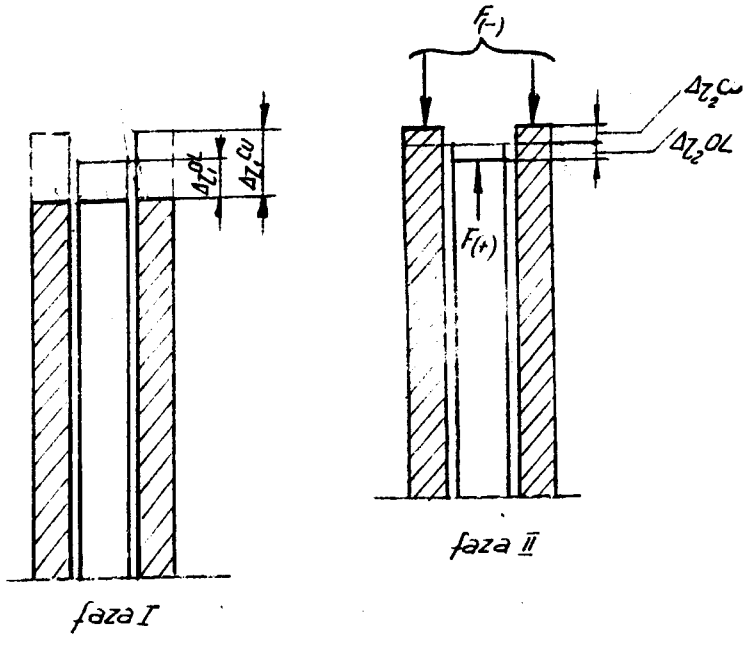


Fig. 27

Dar ansamblul oţel -cupru trebuie să se dilate ca un tot. Deci apare o forţă de interacţiune "F" care comprimă ţeava (cu cantitatea Δl_2^{cu}) care s-ar alungi mai mult şi întinde bulonul cu cantitatea Δl_2^{OL}. (Vezi pe fig. de deasupra, faza II.)

Scriem, deci egalitatea deformaţiilor celor două piese, avînd în vedere cele două faze.

$$l \cdot \alpha_{cu} \cdot \Delta t - \frac{F \cdot l}{E_{cu} \cdot A_{cu}} = l \cdot \alpha_{OL} \cdot \Delta t + \frac{F \cdot l}{E_{OL} \cdot A_{OL}}$$

Rezultă:

$$F = \frac{(\alpha_{cu} - \alpha_{OL}) \cdot \Delta t}{\frac{1}{E_{cu} \cdot A_{cu}} + \frac{1}{E_{OL} \cdot A_{OL}}} = \frac{(17-12) \cdot 10^{-6}}{\frac{1}{1,15 \cdot 10^6 \cdot 4} + \frac{1}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 3,14}} = 405 \text{ kg.}$$

./.

Eforturile unitare corespunzătoare.

$$\sigma_{cu} = -\frac{405}{4} = -101 \ \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma_{OL} = +\frac{405}{3,14} = +129 \ kg/cm^2$$

Suprapunînd efectele, considerînd şi efectul iniţial al strîngerii piuliţei - eforturile finale devin:

$$\sigma_{cu} = -527 - 101 = -628 \ \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma_{OL} = +670 + 129 = +799 \ "$$

1.15. Raza interioară a unui manşon de oţel s-a confecţionat cu cantitatea δ = 2 mm mai mică decît raza exterioară a unui inel de cupru. Pentru a se putea monta, manşonul s-a încălzit şi apoi a fost tras pe inelul de cupru. Să se afle presiunea dintre cele două inele după răcire.

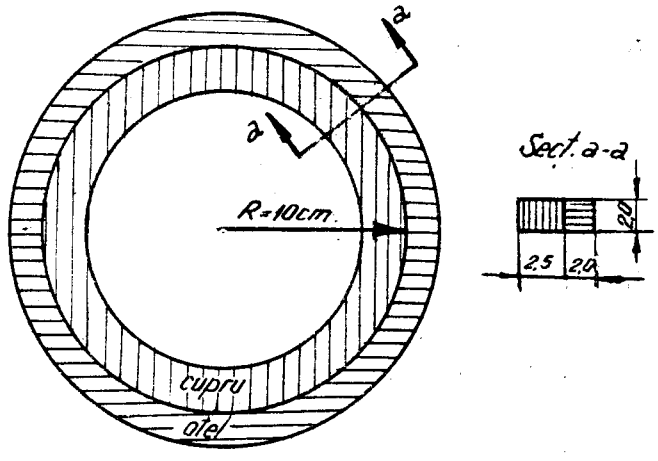


Fig. 28

Aspectul geometric.

I. Situaţia iniţială

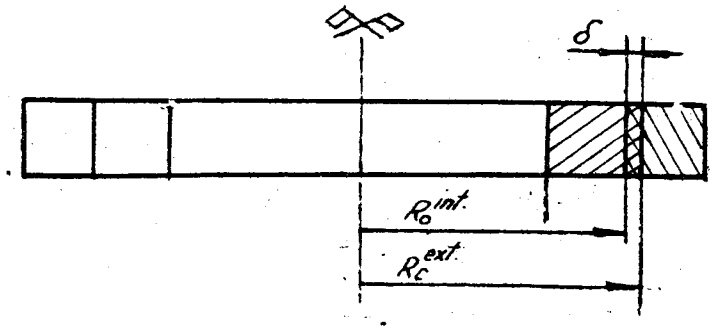


Fig. 29

./.

II. După încălzire, manşonul de oţel a fost tras pe inelul de cupru, (situaţie la un moment dat)

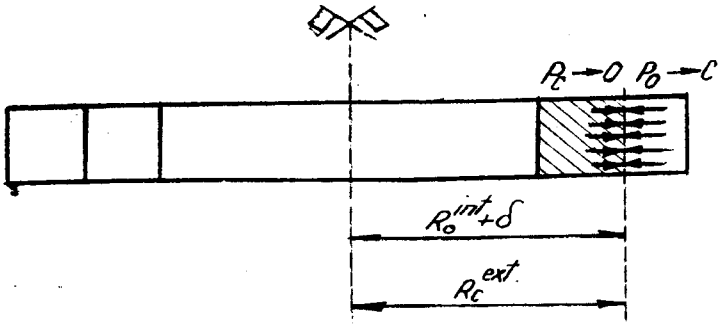


Fig. 30

In timpul răcirii oţelului, acesta tinde să revină la poziţia iniţială I şi comprimă inelul de cupru ($P_o \longrightarrow C$)

Acesta se opune şi caută să menţină întins manşonul de oţel.($P_c \longrightarrow C$)Se stabileşte un echilibru într-o poziţie intermediară.

III.

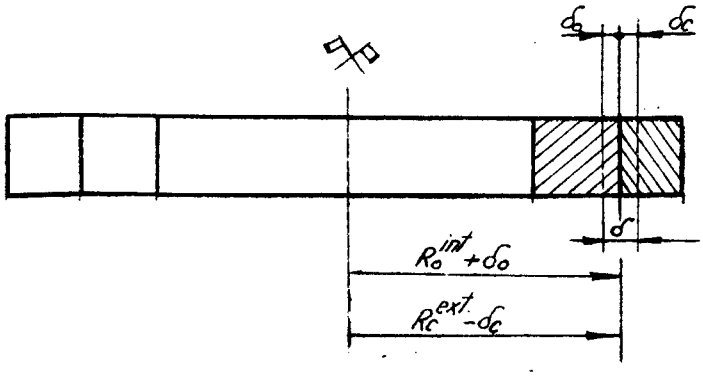


Fig. 31

După răcirea oţelului, raza acestuia rămîne totuşi mărită cu cantitatea δ_o ($\delta_o < \delta$); raza inelului de cupru s-a micşorat cu cantitatea δ_c astfel că avem relaţia de bază:

$$\delta_c + \delta_o = \delta$$

Aspectul static şi fizic.

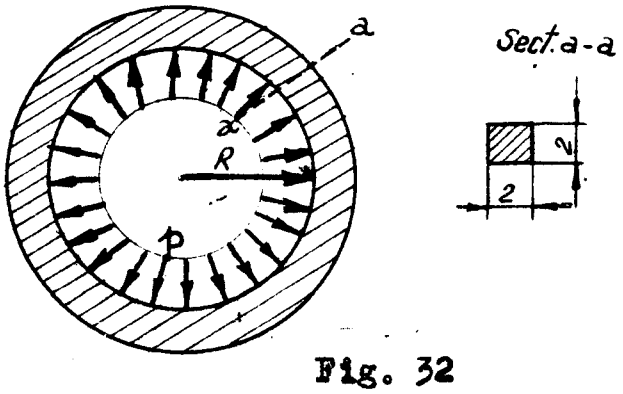


Fig. 32

./.

Se consideră manşonul de oţel supus acţiunii forţelor radiale "p" - uniform-distribuite pe circomferinţa interioară a manşonului; provocate de interacţiunea cu inelul de cupru.

Presupunînd că toate fibrele manşonului se întind uniform iar raza se alungeşte cu cantitatea ΔR, găsim alungirea specifică ε.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_f - l_i}{l_i} = \frac{2\pi(R+\Delta R) - 2\pi R}{2\pi R} = \frac{\Delta R}{R}$$

conform legii lui Hooke, efortul " " în inel va fi:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E = E \cdot \frac{\Delta R}{R}$$

Deci,

$$\Delta R = \frac{\sigma \cdot R}{E} \qquad (1)$$

Facem două secţiuni radiale şi extragem un element de inel căruia îi scrim echilibrul static al forţelor - pe direcţia bisectoarei $\measuredangle d\varphi$

$2 \cdot \sigma \cdot A \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} = p \cdot R \cdot d\varphi$

Unghiul "$d\varphi$" fiind mic, putem aproxima:

$$\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$$

Rămîne,

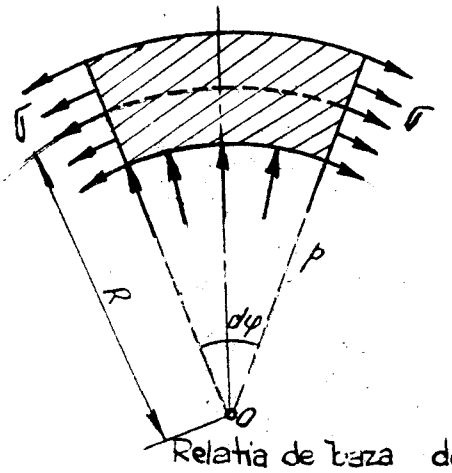
$$\sigma = \frac{p \cdot R}{A} \qquad (2)$$

Introducînd în relaţia (1), obţinem:

$$\Delta R = \frac{p \cdot R^2}{E \cdot A} \qquad (1')$$

In cazul nostru,

$\delta_o = \frac{p \cdot R^2}{E_o \cdot A_o}$, respectiv $\delta_c = \frac{p \cdot R^2}{E_c \cdot A_c}$



Relaţia de bază devine: $pR^2\left(\frac{1}{E_c \cdot A_c} + \frac{1}{E_o \cdot A_o}\right) = \delta$

Fig. 33

Presiunea "p" ($\frac{kg}{cm^2}$) dintre inel şi manşon, este:

$$p = \frac{\delta}{R^2\left(\frac{1}{E_c \cdot A_c} + \frac{1}{E_o \cdot A_o}\right)}$$

Inlocuind valorile problemei noastre, obţinem:

$$p = \frac{0,2}{10^2\left(\frac{1}{1,15 \times 10^6 \times 6,25} + \frac{1}{2,1 \times 10^6 \times 4}\right)} = 77 \frac{kg}{cm^2}$$

1.16. Se dă bara **rigidă** (B), articulată în punctul (M) și orizontală (fig.de mai jos). De ea se prind articulat două tiji de oțel verticale, cu secțiunea egală $A_1 = A_2 = 30\ cm^2$.

Să se determine eforturile în cele 2 tiji, cînd temperatura lor crește cu cantitatea $\Delta t = 25^oC$.

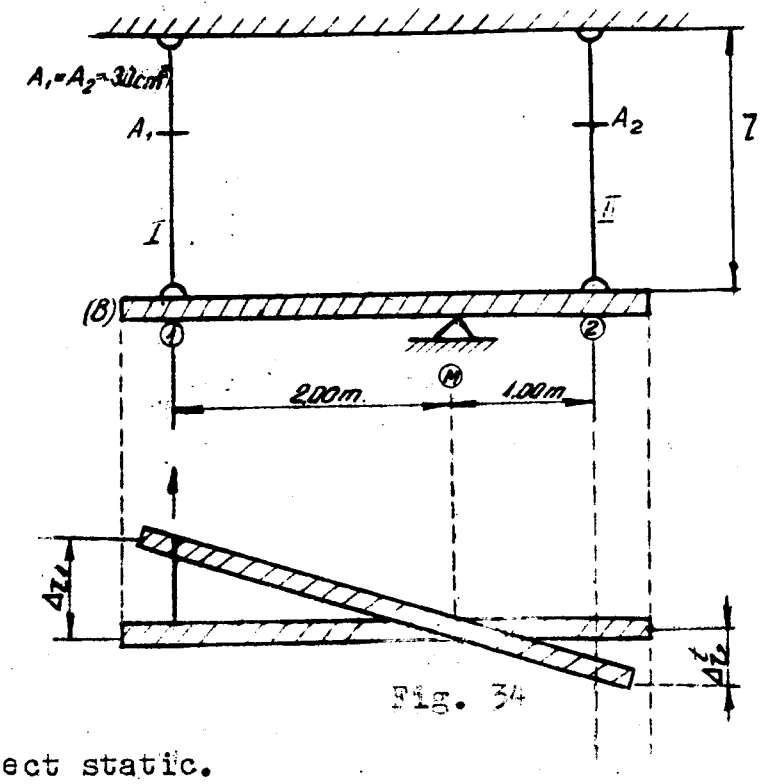


Fig. 34

- Aspect static.

Facem momentul forțelor, în articulația (M)

$$\Sigma X_1 = X_2$$

- Aspectul geometric

Bara se poate roti în jurul articulației (M) Inițial ea este în echilibru (orizontală). Presupunînd că tija II se alungește datorită temperaturii (Δl_2^t), iar tija I nu există, bara (B) se rotește ca în figura de mai sus.

Dar tija I există și în ea apare o tendință de scurtare ($\Delta l_1^{X_1}$) produsă de forța "X_1" de compresiune, generată de alungirea tijei II, datorită creșterii temperaturii; (se neglijează greutatea proprie).

Similar, alungirea tijei I datorită creșterii temperaturii (Δl_1^t), produce în tija II o compresiune "X_2" și o scurtare $\Delta l_2^{X_2}$

In orice caz - deformațiile finale ale tijelor(Δl_1 și Δl_2) trebuie să respecte condiția de proporționalitate impusă de articulația din (M):

Astfel, $\Delta l_1 = 2 \cdot \Delta l_2$.

Sau, suprapunînd efectele:

$$\Delta l_1^t - \Delta l_1^{x1} = 2\,(\Delta l_2^t - \Delta l_2^{x2})$$

$$\alpha \cdot l \cdot \Delta t - \frac{X_1 \cdot l}{E \cdot A} = 2\,(\alpha \cdot l \cdot \Delta t - \frac{X_2 \cdot l}{E \cdot A}) \text{ - aspectul fizic.}$$

Înlocuind numeric, obţinem:

$$12 \times 10^{-6} \times 25 - \frac{X_1}{2{,}1 \times 10^6 \times 30} = 2\,(12 \times 10^{-6} \times 25 - \frac{2\,X_1}{2{,}1 \times 10^6 \times 30}).$$

$$3\,X_1 = 12 \times 2{,}1 \times 25 \times 30$$

$$X_1 = 6\,300 \text{ kg}$$

$$X_2 = 12\,600 \text{ kg}$$

Eforturile de compresiune în cele 2 tiji, vor fi

$$\sigma_I = \frac{6\,300}{30} = 210 \ \frac{kG}{cm^2}$$

$$\sigma_{II} = \frac{12\,600}{30} = 420 \ \frac{kG}{cm^2}$$

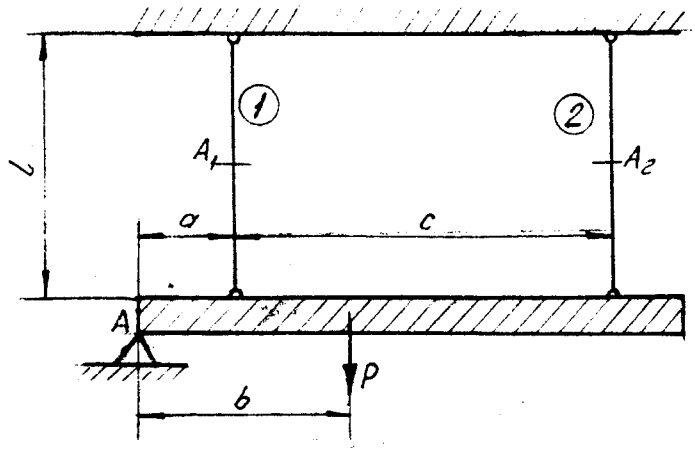


Fig. 35

1.17. Pentru acest sistem nedeterminat, se cere:

1. Determinarea solicitărilor din barele de oţel verticale, grinda fiind încărcată cu sarcina P= 24 800 kG, considerînd grinda perfect rigidă şi secţiunea barelor egală ($A_1=A_2=A$).

2. Dimensionarea barei celei mai solicitate, cu metoda rezistenţelor admisibile ($\sigma_a = 1400 \ \frac{kG}{cm^2}$)

3. Calculul alungirilor Δl_1 și Δl_2

4. Dimensionarea barei celei mai solicitate, cu metoda capacității portante.

Se dau lungimile: a= 1,2o m ; b = 2,4o m
c= 4,8o m ; l = 3,oo m

1. Aspectul static: izolăm grinda rigidă (tăind imaginar legăturile și înlocuindu-le cu forțe) și scrim momentul încovoietor în A:

$$X_1 \cdot a + X_2 \cdot (a+c) = P \cdot b \qquad (1)$$

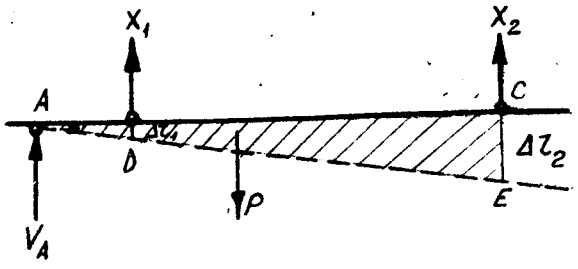


Fig. 36

Aspectul geometric - are în vedere faptul că grinda este indeformabilă.

$\frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2}{a+c}$ (2) din $\Delta_{ABD} \sim \Delta_{ACE}$

Aspectul fizic: aplicăm legea lui Hooke, de legătură între solicitări și deformații.
($\Delta l = \frac{X \cdot l}{E \cdot A}$)

Introducem în relația (2):

(2') $\frac{X_1}{a} = \frac{X_2}{a+c}$

Avem un sistem de 2 ecuații cu 2 necunoscute. Îl rezolvăm. Pentru datele problemei, $X_1 = \frac{ab}{a^2+(a+c)^2} \cdot P$; $X_2 = \frac{b\,(a+c)}{a^2+(a+c)^2} P$

$$X_1 = \frac{12o \cdot 24o}{12o^2+6oo^2} \cdot 248oo = 1915 \text{ KG}$$

$$X_2 = \frac{24o \cdot 6oo}{12o^2+6oo^2} \times 248oo = 9545 \text{ KG}$$

Putem afla și reacțiunea verticală în A, făcînd o proiecție a forțelor pe verticală.

$$\Sigma X_i = 0 \qquad P - X_1 - X_2 - V_A = 0$$

$$V_A = 1334o \text{ KG}$$

2. Dimensionarea barei (A2) cea mai solicitată.

$$A_{nec} = \frac{X_2}{\sigma_a} = \frac{9545}{14oo} = 6,8o \text{ cm}^2$$

$$\frac{\pi d^2}{4} = 6,8o \qquad d = 2,94 \text{ cm}$$

./.

Alegem ϕ 3o mm pentru ambele bare verticale (A_{ef}= 7,o8 cm^2)

$$\sigma_{ef}^{max} = \frac{9545}{7,o8} = 135o \frac{kG}{cm^2} < \sigma_a$$

3. Calculul alungirilor Δl_1 şi Δl_2

$$\Delta l_1 = \frac{1915 \cdot 3oo}{2,1 \cdot 1o^6 \cdot 7,o8} = o,o386 \text{ cm}$$

$$\Delta l_2 = \frac{9545 \cdot 3oo}{2,1 \cdot 1o^6 \cdot 7,o8} = o,1925 \text{ cm}$$

4. In baza metodei la stările limită, în barele de oţel presupuse plastificate - se obţine un efort capabil:

$$N_{cap} = \sigma_c \cdot A$$

Scrim, în acest stadiu, ecuaţia de moment în articulaţia din A.

$$\sigma_c \cdot A \left[a + (a+c) \right] = P \cdot b$$

Impărţind efortul N_{cap} şi cu coeficientul de siguranţă ($c_1 = \frac{\sigma_c}{\sigma_a}$) şi obţinem:

$$A_{nec} = \frac{P \cdot b \cdot c_o}{\sigma_c \left[a+(a+c) \right]} = \frac{P \cdot b \cdot}{\sigma_c \cdot (2a+c)}$$

Inlocuind, rezultă:

$$A_{nec} = \frac{24.8oo \cdot 24o}{14oo \cdot 72o} = 5,9c \text{ cm}^2$$

$$\frac{\pi d^2}{4} = 5,9o \qquad d = 2,74 \text{ cm}$$

Alegem ϕ 28 mm $\longrightarrow A_{ef} = 6,16 \text{ cm}^2 > A_{nec}$

Rezultă o economie de oţel (faţă de metoda elastică) de 13%.

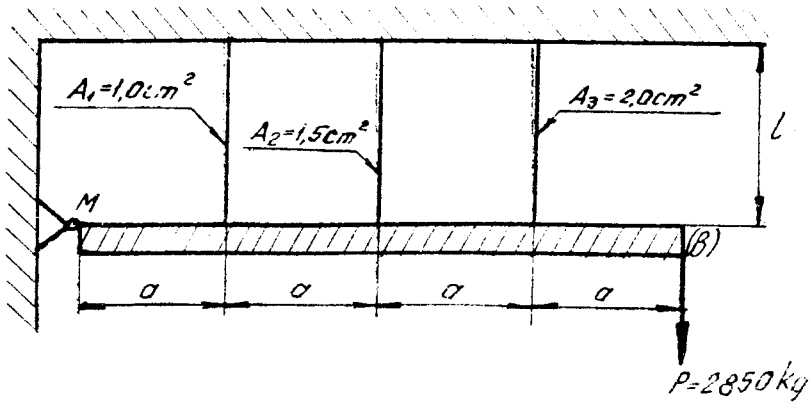


Fig. 37

1.18. Bara rigidă (B) este susţinută de trei fire de oţel cu lungimi egale (l) şi ariile (A) arătate în rigură şi este articulată în punctul M. La capătul opus articulaţiei este acţionată de forţa P = 2 850 kG.

Se cere:

1. Să se determine eforturile unitare care apar în fire.
2. Să se afle reacţiunea din articulaţia M.
3. Să se determine capacitatea portantă a sistemului (sarcina "P" maximă) prin metoda elastică şi plastică.

1. Pentru a afla eforturile unitare în cele trei fire, trebuie să aflăm forţele-reacţiune (T_1, T_2, T_3) care apar în aceste fire.

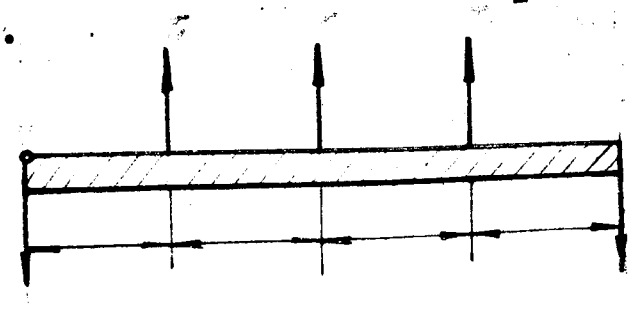


Fig. 38

Bara rigidă (B) se găseşte în echilibru sub acţiunea forţei active P şi a reacţiunilor din fire şi din articulaţia M.

- Studiul static: momentul în punctul M trebuie să fie nul.

Deci,

$$T_1 x a + T_2 \times 2a + T_3 \times 3a = P \times 4a \quad (1)$$

- Studiul geometric.

Sub influenţa forţei P - firele se vor alungi astfel încît bara (B) trebuie să rămînă dreaptă şi se va roti puţin în jurul punctului M.

Diagrama alungirilor variază liniar.

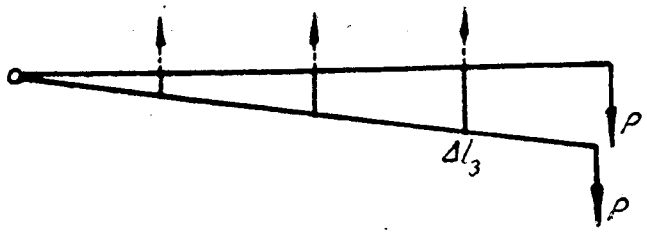


Fig. 39

Deci,

$$\frac{\Delta l_3}{3a} = \frac{\Delta l_2}{2a} = \frac{\Delta l_1}{a} ; \frac{T_3 \cdot l}{3 \cdot E \cdot A_3} = \frac{T_2 \cdot l}{2 \cdot E \cdot A_2} = \frac{T_1 \cdot l}{E \cdot A_1}$$

./.

Simplificăm cu a,l şi E.

Rezultă:

$$T_1 = \frac{A_1}{2A_2} \times T_2 \qquad (2)$$

$$T_3 = \frac{3A_3}{2A_2} \times T_2 \qquad (3)$$

Avem un sistem de trei ecuaţii cu trei necunoscute (T_1, T_2, T_3).

Il rezolvăm:

$$(1') \quad \frac{A_1}{2A_1} \times T_2 + 2 \times T_2 + \frac{3A_3}{2A_2} \times 3T_2 = 4P$$

$$T_2 = \frac{8A_2}{A_1 + 4A_2 + 9A_3}$$

$$(2') \quad T_1 = \frac{4A_1}{A_1 + 4A_2 + 9A_3}$$

$$(3') \quad T_3 = \frac{12A_3}{A_1 + 4A_2 + 9A_3} \times P$$

Eforturile unitare de întindere în cele trei fire:

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{A_1} = + \frac{4 \times 2\,850}{1{,}0 + 4 \times 1{,}5 + 9 \times 2{,}0} = + 456 \text{ kG/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{T_2}{A_2} = + \frac{8 \times 2\,850}{1{,}0 + 4 \times 1{,}5 + 9 \times 2{,}0} = + 912 \text{ kG/cm}^2$$

$$\sigma_3 = \frac{T_3}{A_3} = + \frac{12 \times 2\,850}{1{,}0 + 4 \times 1{,}5 + 9 \times 2{,}0} = + 1\,368 \text{ kG/cm}^2$$

Se observă că efortul maxim este mai mic decît rezistenţa admisibilă (1400 kG/cm^2), deci sistemul rezistă.

2. Reacţiunea V_M se obţine dintr-o proiecţie a forţelor de verticală.

$$T_1 + T_2 + T_3 - V_M = P$$

Introducînd valorile obţinute pentru forţele T, se obţine pentru V_M:

$$V_M = \frac{3A_1 + 4A_2 + 3A_3}{A_1 + 4A_2 + 9A_3} \cdot P$$

./.

La noi:

$$V_M = \frac{3\,x1,o + 4\,x\,1,5 + 3x\,2,o}{1,o + 4\,x1,5 + 9\,x\,2,o}\ x\ 2\ 85o = 1,71o\ kG.$$

3. Determinarea capacităţii portante a sistemului. ($P_{capabil}$).

a) Metoda elastică (Metoda rezistenţelor admisibile).

La punctul 1 am obţinut valorile eforturilor în bare, funcţie de sarcina P şi de ariile celor trei bare (A_1, A_2, A_3).

Valoarea cea mai mare a sarcinei exterioare "P" este cea care produce în tija nr. 3, cea mai solicitată, o rezistenţă maximă (14oo kg/cm^2).

$$P_{cap} = \frac{A_1 + 4A_2 + 9A_3}{12}\ x\ \sigma_a$$

Rezultă:

$$P_{cap} = \frac{1,o + 4\ x1,5 + 9x\ 2,o}{12}\ x\ 1\ 4oo = 2\ 92o\ kG.$$

Celelalte două fire nu au atins limita maximă de rezistenţă (1 4oo).

b) Metoda plastică.(metoda sarcinii admisibile).

Presupunem că în tija nr. 3 am atins limita de curgere; solicităm sistemul în continuare (continuăm să mărim încărcarea), pînă cînd în toate cele trei fire am atins $\sigma_{curgere}$.

Scrim în acest stadiu (de plastifiere totală a secţiunilor) ecuaţia de moment în punctul M.

$$\Sigma M_M = 0$$

$$T_1 \times a + T_2 \times 2a + T_3 \times 3a = P_{cap} \times 4a$$

$$\sigma_c(A_1 + 2A_2 + 3A_3) = 4\ P_{cap}.$$

Deci,

$$P_{cap}^{curg} = \frac{A_1 + 2A_2 + 3A_3}{4}\ x\ \sigma_c.$$

împărţim cu coeficientul de siguranţă "C". Stim că:

$$\frac{\sigma_c}{c} = \sigma_a.$$

Rezultă,

$$P_{cap} = \frac{1,o + 2\ x\ 1,5 + 3\ x\ 2,o}{4}\ x\ 1\ 4oo = 3\ 5oo\ kG.$$

Se vede avantajul metodei de calcul în domeniul plastic.

./.

1.19. Sistemul simetric compus din 3 bare de oţel ($E = 2,1 \cdot 10^6 \frac{kG}{cm^2}$) rigide, prinse articulat între ele şi de teren (conf. fig. de mai jos), este încărcat cu o sarcină P= 13,5 T.

Se dau secţiunile barelor ($A_{AC} = A_{BC} = 5,5o\ cm^2$ şi $A_{CD} = 8,8o\ cm$ lungimile lor ($l_{AC} = l_{BC} = 2,5o$ m şi $l_{CD} = 4,oo$ m) şi înclinarea barelor laterale ($\alpha = 3o^0$).

Să se calculeze eforturile în bare.

Se consideră: $\sigma_a = 1ooo \frac{kG}{cm^2}$ (redus, pentru a avea în vedere fenomenul de flambaj).

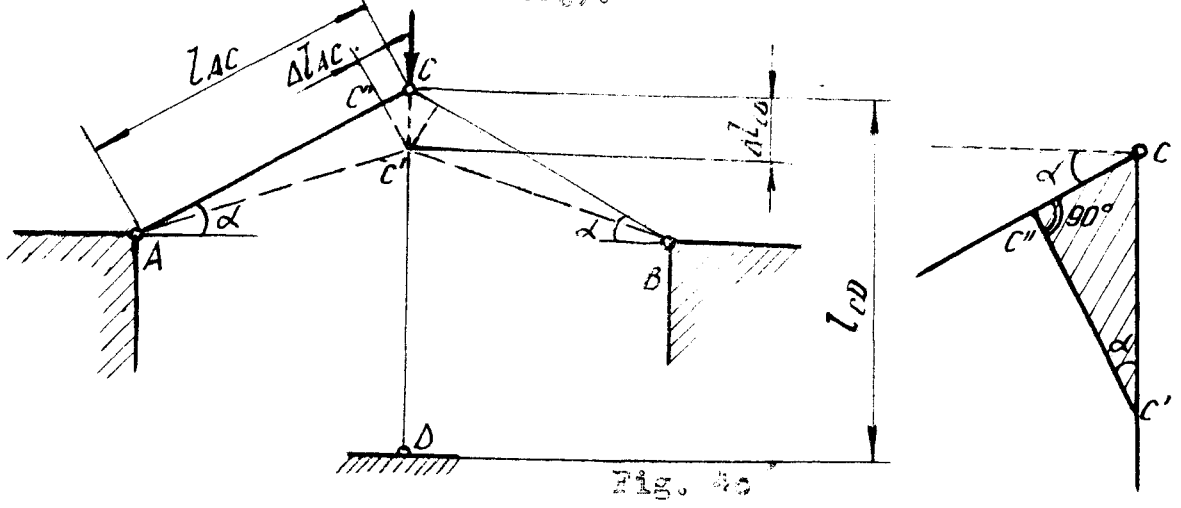


Fig. 4o

Pentru a găsi solicitările în bare (F_{AC}, F_{BC}, F_{CD}) observăm că izolînd nodul C, avem la dispoziţie 2 ecuaţii (de proiecţii-studiul static) pentru 3 necunoscute:

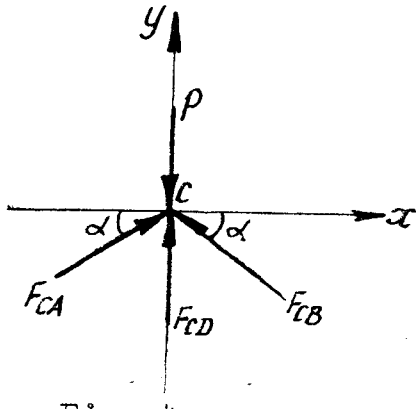


Fig. 4o a.

$$(1)\ \Sigma X_i = 0 \rightarrow F_{AC} \cdot \cos\alpha - F_{BC} \cdot \cos\alpha = 0$$

$$F_{AC} = F_{BC}$$

$$(2)\ \Sigma Y_i = 0 \rightarrow F_{AC} \cdot \sin\alpha + F_{BC} \cdot \sin\alpha + F_{CD} - P = 0$$

$$2 F_{AC} \cdot \sin\alpha + F_{CD} = P$$

Sistemul este static nedeterminat.

Recurgem la studiul geometric (deformaţia sistemului). Sub acţiunea forţei P, articulaţia C se deplasează în C'; bara AC se scurtează cu cantitatea CC'' (Δl_{AC}).

Neglijînd variaţia unghiului α datorită deformaţiei şi aproximînd arcul de cerc C'C'' cu coarda (AC' ≈ AC''), putem scrie:

(3) $\Delta l_{AC} = \Delta l_{CD} \cdot \sin\alpha$

Exprimăm scurtările (Δl) în funcţie de solicitări (F) - studiul fizic:

(3') $$\frac{F_{AC} \cdot l_{AC}}{E \cdot A_{AC}} = \frac{F_{CD} \cdot l_{CD}}{E \cdot A_{CD}} \cdot \sin\alpha$$

Rezultă:

$$F_{AC} = \frac{l_{CD}}{l_{CA}} \cdot \frac{A_{AC}}{A_{CD}} \cdot \sin\alpha \cdot F_{CD} \qquad (3'')$$

Introducînd în ecuaţia (2), obţinem:

$$F_{CD} = \frac{P}{1+2 \cdot \frac{l_{CD}}{l_{CA}} \cdot \frac{A_{AC}}{A_{CD}} \cdot \sin^2\alpha} = \frac{13,5o}{1+2 \cdot \frac{4}{2,5o} \cdot \frac{2,5o}{8,8o} \cdot \frac{1}{4}}$$

$$F_{CD} = 9 \text{ T}.$$

Din ec. (2), scoatem solicitarea F_{AC}:

$$F_{AC} = \frac{P - F_{CD}}{2 \sin\alpha} = \frac{13,5o - 9}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$F_{AC} = 4,5o \text{ T}; \quad F_{BC} = 4,5o \text{ T}$$

Rezultă următoarele eforturi de compresiune:

$$\sigma_{AC} = \frac{F_{AC}}{A_{AC}} = \frac{45oo}{5,5o} = 819 \frac{kG}{cm^2}$$

$$\sigma_{CD} = \frac{F_{CD}}{A_{CD}} = \frac{9ooo}{8,8o} = 1o23 \frac{kG}{cm^2} < \sigma_{a\ red}$$

1.2o. O placă dreptunghiulară stă pe patru picioare (stîlpi) de aceiaşi lungime şi secţiune şi este încărcată într-un punct de coordonate: $x = \frac{2}{3}a$; $y = \frac{1}{4}b$ cu o forţă concentrată (un utilaj) P= 153o kG. Să se calculeze mărimea solicitărilor în cei 4 stîlpi.

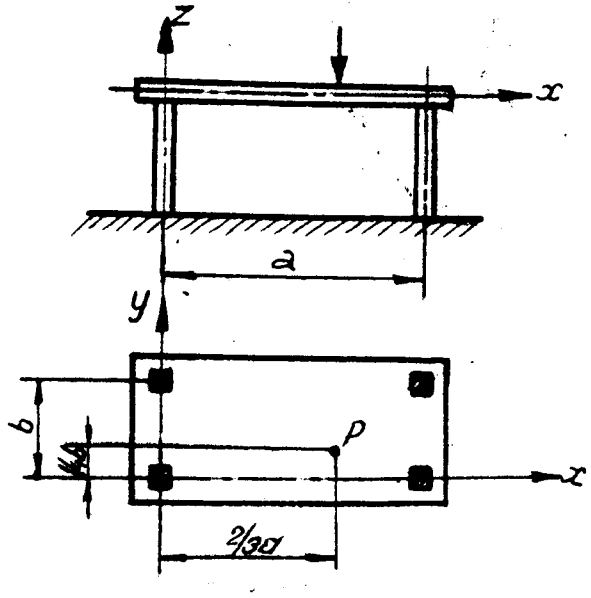


Fig. 41

Se notează cu N_1, N_2, N_3, N_4 - mărimile solicitărilor care apar în cele 4 picioare.

Studiul static - scrim ecuaţiile de proiecţie pe verticală (după axa zz) şi momente faţă de axele xx şi yy.

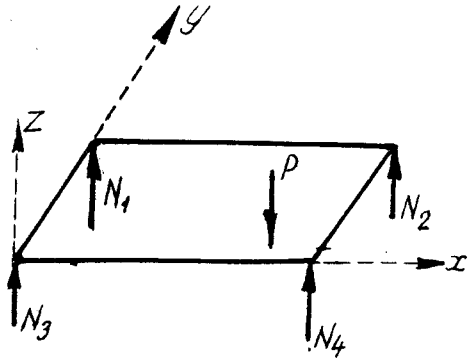


Fig. 42

$$(1)\ \Sigma Z_i = 0 \longrightarrow N_1 + N_2 + N_3 + N_4 - P = 0$$

$$(2)\ \Sigma M_x = 0 \longrightarrow P\,\frac{1}{4}\,b - (N_1 + N_2).b = 0$$

$$(3)\ \Sigma M_y = 0 \longrightarrow P\,\frac{2}{3}\,a - (N_2 + N_4).a = 0.$$

Sistemul este static nedeterminat; pentru a găsi a patra ecuaţie care ne este necesară - trecem la studiul geometric: considerăm că masa se deplasează ca în fig.de mai jos, rămînînd plană.

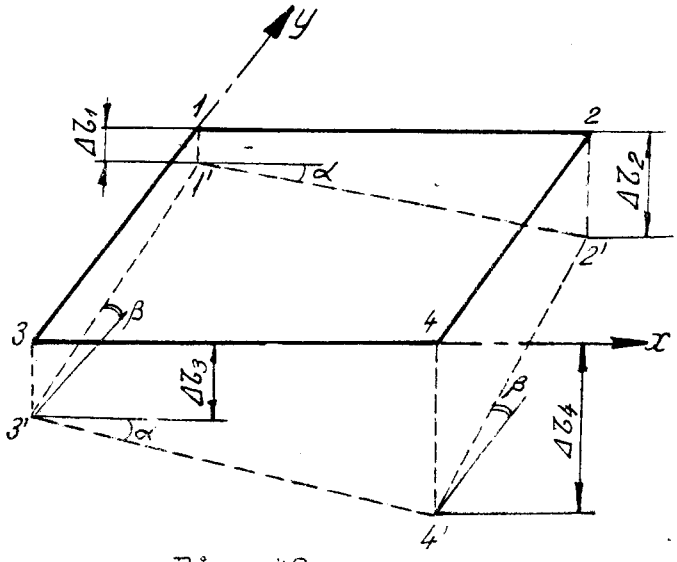


Fig. 42 a.

$$tg\alpha = \frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_4 - \Delta l_3}{a}$$

$$tg\beta = \frac{\Delta l_3 - \Delta l_1}{b} = \frac{\Delta l_4 - \Delta l_2}{b}$$

Alcătuind relaţiile, se ajunge la ecuaţia (4) - a:

$$(4)\ \Delta l_2 + \Delta l_3 = \Delta l_1 + \Delta l_4$$

Înlocuind deformaţiile cu solicitări (studiul fizic):

$$(4')\ \frac{N_2 \cdot l}{E.A.} + \frac{N_3 \cdot l}{E.A.} = \frac{N_1 \cdot l}{E.A.} + \frac{N_4 \cdot l}{E.A.}$$

Simplificînd, obţinem:

$$(4'')\ N_2 + N_3 = N_1 + N_4$$

Rezolvînd sistemul, se obţin valorile pentru cele 4 solicitări în stîlpi:

$$N_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{P}{2} + \frac{5}{12}P\right) = \frac{11}{24}P = \frac{11 \times 1530}{24} = 700\ kG$$

$$N_1 = \frac{P}{2} - N_4 = 765 - 700 = 65\ kG$$

$$N_2 = \frac{P}{4} - N_1 = 382 - 65 = 317\ kG$$

$$N_3 = \frac{P}{2} - N_2 = 765 - 317 = 448\ kG$$

./.

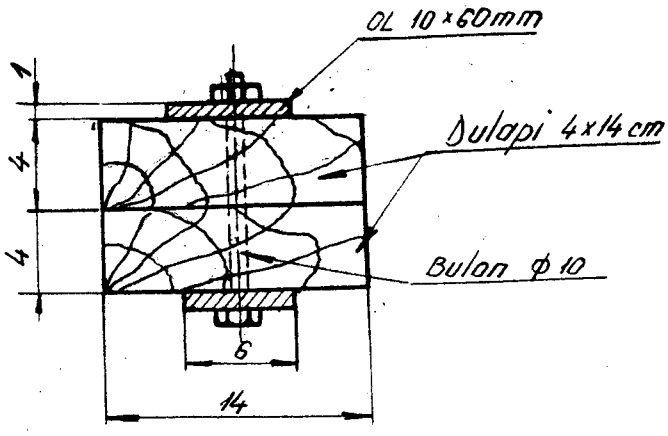


Fig. 43

1.21. Doi dulapi din lemn sînt asamblaţi cu ajutorul a două benzi longitudinale de oţel lat, prin intermediul unor buloane ϕ 1o mm.

Să se verifice rezistenţa în lemn şi oţel, cînd bara este tensionată de o forţă N = 21 T.

Se dau: $\sigma_{a,\ lemn} = 1oo\ kG/cm^2$; $E_L = 1o^5\ kG/cm^2$

$\sigma_{a,\ oţel} = 1\,4oo\ kG/cm^2$; $E_{oL} = 2{,}1 \times 1o^6\ kG/cm^2$.

Calculul secţiunii nete

$$A_n^L = 2 \times (14 - 1) \times 4 = 1o4\ cm^2.$$

$$A_n^{OL} = 2 \times (6-1) \times 1 = 1o\ cm^2$$

Sub efectul forţei de tracţiune N, bara compusă (lemn + oţel) se alungeşte ca un singur întreg. Trebuie ca alungirea Δl_1 a oţelului produsă de componenta N_1 a sarcinei să fie egală cu alungirea Δl_2 a lemnului, produsă de cealaltă componentă N_2.

Deci, $$\frac{N_1 l}{E_{oL} \cdot A_{oL}} = \frac{N_2 l}{E_L \cdot A_L} \quad (1)$$

- Din condiţia de echilibrul forţelor de-a lungul axei barei, rezultă cea de a doua relaţie:

$$N_1 + N_2 = N \quad (2)$$

Avem un sistem de 2 ecuaţii cu două necunoscute (N_1 şi N_2) îl rezolvăm:

$$N_1 \frac{E_{oL} \cdot A_{oL}}{E_{oL} \cdot A_{oL} + E_L \cdot A_L} \times N$$

$$N_2 \frac{E_L \cdot A_L}{E_{oL} \cdot A_{oL} + E_L \cdot A_L} \times N$$

In cazul nostru:

$$N_1 = \frac{2{,}1 \times 10^6 \times 10}{2{,}1 \times 10^6 \times 10 + 10^5 \times 10^4} \times 21{,}000.$$

$$N_2 = \frac{10^5 \times 10^4}{2{,}1 \times 10^6 \times 10 + 10^5 \times 10^4} \times 21.000$$

$$N_1 = 14.050 \text{ kG}$$

$$N_2 = 6.950 \text{ kG}$$

Eforturile unitare efective în cele două materiale

$$\sigma_{oL} = \frac{14.050}{10} = 1.405 \text{ kG/cm}^2 \cong \sigma_{adm.} = 1.400$$

$$\sigma_L = \frac{6.950}{10^4} = 67 \text{ kG/cm}^2 < \sigma_{adm.} = 100$$

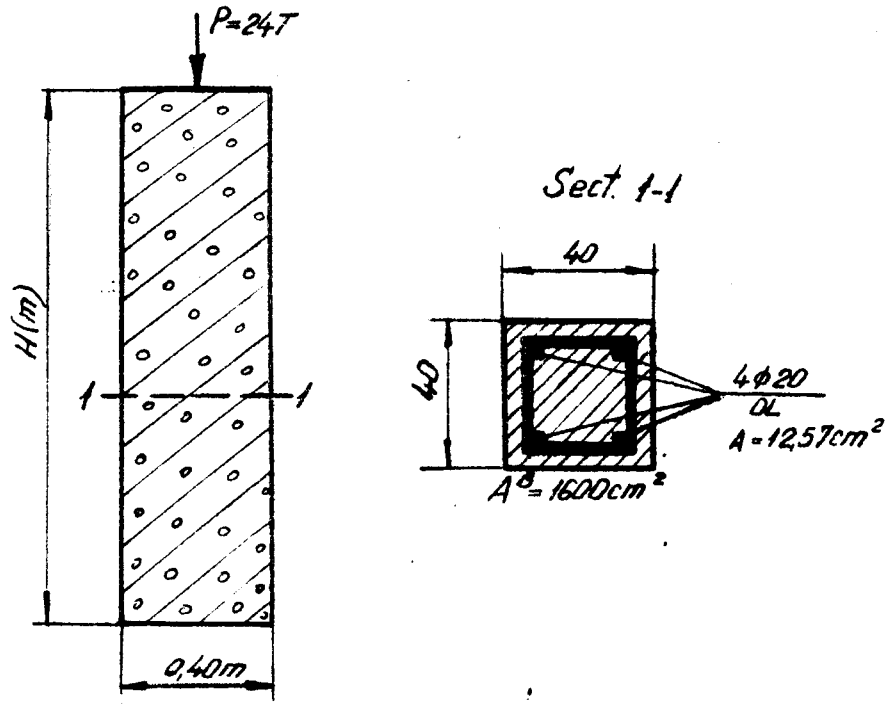


Fig. 44

1.22. Un stîlp de beton armat, cu secţiunea pătrată (40 x 40 cm) şi armat simetric cu patru fiare de 20 mm diametru- este comprimat centric cu o forţă P = 42 T (fig. de mai sus.)

1. Să se afle eforturile unitare ce apar în beton şi în armătură.

2. Să se determine capacitatea portantă a sistemului după cele 2 metode.

./.

Se dă greutatea specifică a betonului armat: $\gamma = 2,4 T/m^3$ şi modulii de elasticitate: $E^B = 1,4 \times 10^5$ kG/cm^2 (beton simplu) şi $E^{OL} = 2,1 \times 10^6$ kg/cm^2 (armătură)

1. Secţiunea cea mai solicitată va fi la baza stîlpului, unde pe lîngă forţa F acţionează şi greutatea stîlpului G.

$$G = 0,40 \times 0,40 \times 3,50 \times 2,4 = 1,34 \text{ T}$$

Sarcina totală de compresiune "N" va fi:

$$^{o}N = P + G = 43,4 \text{ T}$$

Această sarcină trebuie să fie preluată de beton şi de armătură. Aflăm cît revine fiecăruia, apreciind următoarea situaţie: stîlpul de beton armat lucrează ca un tot unitar. Deci, deformaţia armăturii şi a betonului, sub influenţa componentelor respective (N^{OL} şi N^B) trebuie să fie egale (datorită fenomenului de adeziune)

$$\frac{N^{OL} \times H}{E^{OL} \times A^{OL}} = \frac{N^B \times H}{E^B \times A^B} \qquad (1)$$

Relaţia a doua rezultă din condiţia de echilibru static.

$$N^{OL} + N^B = N. \qquad (2)$$

Rezolvăm sistemul şi aflăm necunoscutele. (N^{OL} şi N^B).

$$N^{OL} = N \times \frac{E^{OL} \times A^{OL}}{E^{OL} \times A^{OL} + E^B \times A^B}$$

$$N^B = N \times \frac{E^B \times A^B}{E^B \times A^B \times E^{OL} \times A^{OL}}$$

In cazul nostru:

$$N^{OL} = 43.400 \times \frac{2,1 \times 10^6 \times 12,57}{2,1 \times 10^6 \times 12,57 + 1,4 \times 10^5 \times 1600} = 4600 \text{ kG}$$

$$N^B = 43.400 \times \frac{1,4 \times 10^5 \times 1600}{2,1 \times 10^6 \times 12,57 + 1,4 \times 10^5 \times 1600} = 38800 \text{ kG}$$

Eforturile unitare de compresiune care apar în cele două materiale, produse de forţele "N"

$$\sigma_{OL} = \frac{4600}{12,57} = 368 \frac{kG}{cm^2}$$

$$\sigma_B = \frac{38\,800}{1\,600} = 24,3 \frac{kG}{cm^2}$$

./.

2. Determinarea capacităţii portante (N_{cap})

- Metoda de calcul în stadiul elastic.

Cea mai mare sarcină axială N care se poate aşeza pe stîlp se determină cu relaţia:

$$N = \frac{\sigma_B \times (E_{OL} \times A_{OL} + E_B \times A_B}{E_B}$$

în cazul nostru,

$$N = \frac{60 \times (2{,}1 \times 10^6 \times 12{,}57 + 1{,}4 \times 10^5 \times 1600)}{1{,}4 \times 10^5}$$

$$N_{cap} = 108\ T$$

In acest moment în beton am atins rezistenţa admisibilă ($60\ kG/cm^2$); armătura este solicitată însă sub limita admisibilă ($1.400\ kG/cm^2$).

- Metoda de calcul în stadiul plastic.

Continuăm să sporim sarcina (N) pînă cînd şi în armătură atingem rezistenţa de curgere (beton atinsese deja rezistenţa prismatică).

Lucrăm cu un coeficient de siguranţă c= 2,0

Scriem o proiecţie a forţelor pe verticală, în stadiul limită:

$$C.N = (A_B \times R_{pr} + A_{OL} \times \sigma_c$$

$$N = \frac{A_B \times R_{pr} + A_{OL} \times \sigma_c}{C}.$$

In cazul de faţă,

$$N = \frac{1600 \times 125 + 12{,}57 \times 2850}{2}$$

$$N_{cap} = 117{,}9\ T$$

Observaţie: Nu s-a considerat fenomenul de flambaj (vezi cap.IX)

1.23. La montaj se constată că tija (1), care leagă bara (B) indeformabilă şi articulată în punctul (A) - este mai scurtă cu cantitatea $\Delta = 2$ mm. Secţiunile celor 2 tije de oţel (A_1,A_2) sînt egale.

Să se afle eforturile care iau naştere în cele două tije prin montarea forţată a lor.

./.

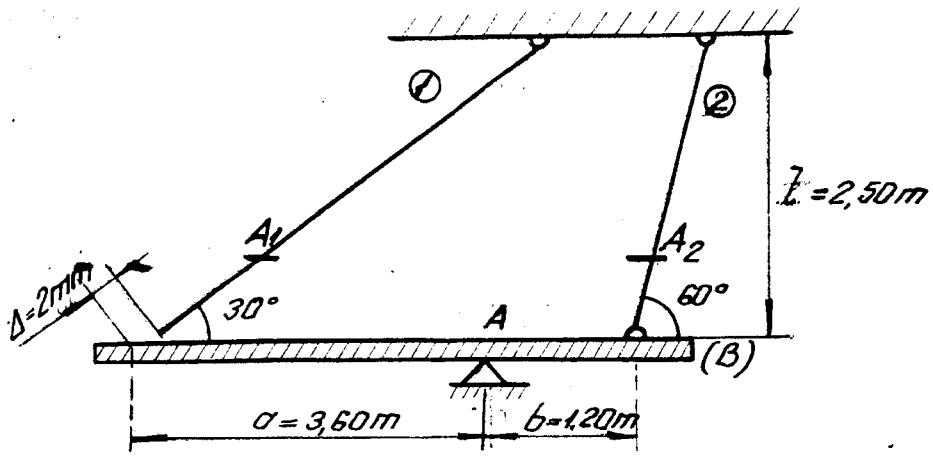


Fig. 45

- Aspectul geometric.

Bara rigidă se poate deplasa compatibil cu legăturile: ea se roteşte în jurul articulaţiei A. Capătul B este tras în sus pentru a prinde tija (1), deci capătul C coboară proporţional.

Raportul deplasărilor pe verticală a celor 2 capete ale barei (B,C) este:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b} = 3.$$

Dar deplasările h_1 şi h_2 au următoarea valoare:

$$h_1 = \frac{\Delta - \Delta l_1}{\sin\alpha_1} \; ;$$

$$h_2 = \frac{\Delta l_2}{\sin\alpha_2}$$

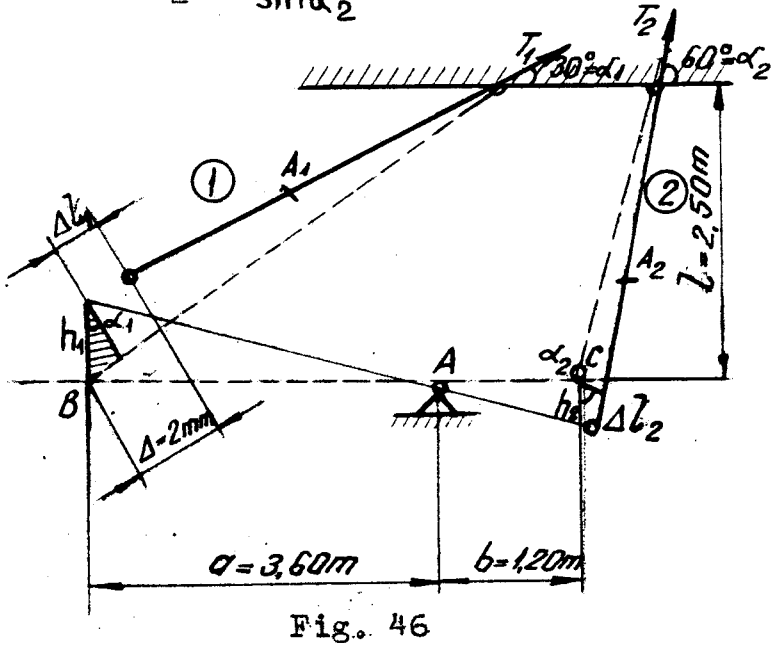


Fig. 46

Unde: Δl_1 şi Δl_2 sînt alungirile celor 2 tije, produse de forţele de întindere T_1 şi T_2.

$$\underline{\text{Deci}}, \quad 3 = \frac{\Delta - \Delta l_1}{\Delta l_2} \cdot \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{\Delta - \Delta l_1}{\Delta l_2} \cdot \frac{0,866}{0,5} = 1.73 \; \frac{\Delta - \Delta l_1}{\Delta l_2}$$

$$\Delta l_1 + 1,73 \Delta l_2 = \Delta$$

- Aspectul fizic.

Trecem de la deformaţii la eforturi, folosind legea lui Hooke.

$$\frac{\sigma_1 l_1}{E} + 1,73 \cdot \frac{\sigma_2 l_2}{E} = \Delta$$

$$\sigma_1 \cdot \frac{1}{\sin 30^\circ} + 1,73 \cdot \sigma_2 \frac{1}{\sin 60^\circ} = \Delta \cdot E$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\Delta E}{2.1} . \qquad (1)$$

- Aspectul static.

Facem momentul nul în articulaţia A. Vor da moment doar forţele interioare de tensiune, aplicaţie în capetele barei. Forţele le considerăm acţionînd pe direcţia punctată, fiind în domeniul micilor deplasări şi avînd dreptul să facem această aproximaţie.

$$T_1 \cdot \sin 30^\circ \cdot a - T_2 \cdot \sin 60^\circ b = 0.$$

$$T_1 \cdot 0,5 \cdot a - T_2 \cdot 0,866 \cdot b = 0.$$

$$T_2 = T_1 \cdot \frac{0,5}{0,866} \cdot \frac{a}{b} = 1,73 \cdot T_1 .$$

$$\sigma_2 = 1,73 \cdot \sigma_1 . \qquad (2)$$

Avem un sistem de ecuaţii cu 2 necunoscute. Îl rezolvăm.

$$(1') \quad \sigma_1 (1 + 1,73) = \frac{\Delta \cdot E}{2 \cdot l}$$

$$\sigma_1 = 0,184 \cdot \frac{\Delta E}{l}$$

$$\sigma_2 = 0,317 \cdot \frac{\Delta \cdot E}{l}$$

Înlocuind cu datele problemei noastre, obţinem eforturile unitare de tensiune din cele 2 tije.

$$\sigma_1 = 0,184 \times \frac{0,2 \times 2,1 \times 10^6}{250} = 308 \; \frac{kg}{cm^2} . \; (+)$$

$$\sigma_2 = 0,317 \times \frac{0,2 \times 2,1 \times 10^6}{250} = 531 \; \frac{kg}{cm^2} . \; (+)$$

./.

1.24. Blocurile B I şi BII trebuie legate între ele prin intermediul a 3 bare de oţel, de secţiune egală. ($A=4\ cm^2$).

Avînd în vedere că bara 2 este mai lungă decît celelalte cu cantitatea $\Delta l = 1$ mm, să se afle eforturile unitare în bare provenite din montarea forţată a celor două blocuri.

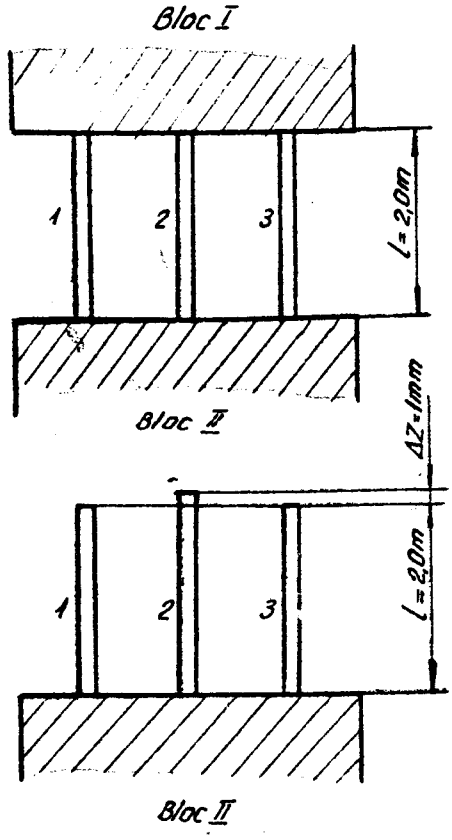


Fig. 47

- Aspectul geometric.

a. Prin montarea blocului I - bara 2 este comprimată, astfel încît ea se scurtează cu cantitatea Δl ; un moment toate barele au lungimea l.

b. După montare - bara 2 tinde să revină la lungimea sa iniţială $(l + \Delta l)$ şi ridică puţin blocul I. Aceste trage la rîndul său de barele 1 şi 2, care au o lungime mai mică (l).

Prin intermediul barelor 1 şi 3

c. Blocul II se opune acestui fenomen ; se stabileşte un echilibru într-o situaţie intermediară.

Barele 1 şi 3 s-au alungit totuşi cu cantitatea $\Delta l_1 (\Delta l_3)$ iar bara 2 s-a scurtat cu cantitatea Δl_2.
In orice caz: $\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta l$ (ec. de deformaţie)

./.

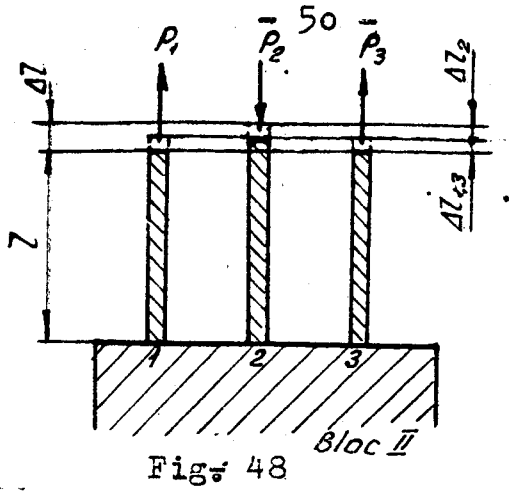


Fig. 48

- Aspectul static

Sistemul de forţe P_1, P_3 (care întind barele 1 şi 3) şi P_2 (care comprimă bara 2) trebuie să fie în echilibru

Deci,

$$P_1 + P_3 - P_2 = 0 \text{ (ec. de proiecţie)}$$

sau: $2P_1 - P_2 = 0$ (1)

- Aspectul fizic:

Leagă aspectul geometric de cel static, folosind relaţia de proporţionalitate dintre eforturi şi deformaţii a lui Hooke. ($\sigma = \varepsilon \cdot E$)

Ecuaţia de deformaţie devine:

$$\frac{P_1 \cdot l}{E \cdot A} = \frac{P_2 \cdot (l + \Delta l)}{E \cdot A} = \Delta l$$

sau:

$$P_1 \cdot l + P_2 \cdot l + P_2 \cdot \Delta l = E \cdot A \cdot \Delta l. \quad (2)$$

Avem două ecuaţii (1) şi (2) cu două necunoscute (P_1 şi P_2).

Rezolvăm:

$$(2') \quad P_1 l + 2P_1 l + 2P_1 \cdot \Delta l = E \cdot A \cdot \Delta l$$

$$P_1(3l + 2\Delta l) = E \cdot A \cdot \Delta l$$

Deci,

$$P_{1,3} = \frac{E \cdot A \cdot \Delta l}{3l + 2\Delta l}$$

$$P_2 = \frac{2E \cdot A \cdot \Delta l}{3l + 2\Delta l}$$

În cazul nostru:

./.

$$P_{1,3} = \frac{2,1 \times 10^6 \times 4 \times 0,1}{3 \times 200 + 2 \times 0,1} = 1\,400 \text{ kG}$$

$$P_2 = P_1 = 2\,800 \text{ kG}$$

Eforturile unitare în bare:

$$\sigma_{1,3} = + \frac{1\,400}{4} = + 350 \frac{kG}{cm^2}$$

$$\sigma_2 = - \frac{2\,800}{4} = - 700 \frac{kG}{cm^2}$$

1.25. Să se determine forţa maximă "P" care se poate aşeza pe grinda cu zăbrele din figură, prin metoda obişnuită de rezolvare a sistemelor static nedeterminate şi prin metoda capacităţii portante. Pentru simplificare, se exclude pericolul flambajului.

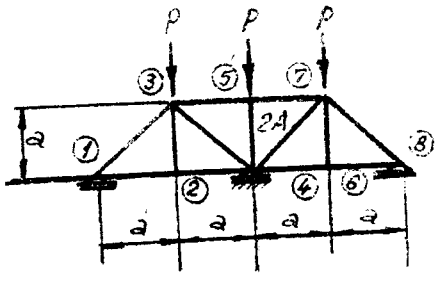


Fig. 49

1. Sistemul cu zăbrele este odată static nedeterminat exterior. Sistemul de bază (static determinat) a fost obţinut prin suprimarea reazemului intermediar şi considerînd ca necunoscută reacţiunea X.

Necunoscuta rezultă din ecuaţia:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1s} = 0$$

unde, $\delta_{11} = \sum \frac{n_{ij,1}^2 \cdot l_{ij}}{E \cdot A_{ij}}$

$$1 = \sum \frac{n_{ij,1} \cdot N_{ijP} \cdot l_{ij}}{E \cdot A \cdot_{ij}}$$

"$n_{ij,1}$" reprezentînd eforturile pe sistemul de bază, încărcat cu x = 1 (diagrama unitară)

$N_{ij,P}$ reprezentînd eforturile pe sistemul de bază, încărcat cu sarcinile date P.

In tabela ce urmează s-au calculat elementele necesare calculului necunoscutei X.

./.

TABELA EFORTURILOR

1	2	3	4	5	6	7	8
BARA ij	$l_{ij}\frac{A_0}{A_{ij}}$	$N_{ij,P}$	$n_{ij,1}$	$(n_{ij,1})^2$	$N_{ij,P}\cdot n_{ij}\cdot l_{ij}\frac{A_0}{A_{ij}}$	$(n_{ij})^2\cdot l_{ij}\cdot\frac{A_0}{A_{ij}}$	$N_{ij}=N_{ij,P}+X\cdot n_{ij,1}$
13	$a\sqrt{2}$	$-\frac{3}{\sqrt{2}}P$	$+\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{\sqrt{2}}Pa$	$\frac{1}{\sqrt{2}}a$	$-0,595P$
12	a	$+\frac{3}{2}P$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}Pa$	$\frac{1}{4}a$	$+0,42P$
24	a	$+\frac{3}{2}P$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}Pa$	$\frac{1}{4}a$	$+0,42P$
34	$a\sqrt{2}$	$+\frac{1}{\sqrt{2}}P$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}Pa$	$\frac{1}{\sqrt{2}}a$	$-0,823P$
35	a	$-2P$	$+1$	1	$-2Pa$	a	$+0,16P$
45	$\frac{a}{2}$	$-P$	0	0	0	0	$-P$
SUMA					$-(4\sqrt{2}+7)Pa$	$(2\sqrt{2}+3)a$	

$$X=\frac{4\sqrt{2}+7}{2\sqrt{2}+3}P=2,16P$$

Bara cea mai solicitată nu este bara 45 deoarece are secţiunea dublă (eforturile unitare sînt mai mici decît în celelalte bare), ci barele 34 şi 47. Ele determină valoarea admisibilă a sarcinii P.

$$0{,}823.P = A.\frac{\sigma_c}{c}$$

$$P = 1{,}21.\ A.\frac{\sigma_c}{c}$$

2. Pentru a face calculul prin metoda capacităţii portante, se observă că barele 34 şi 47 ajung primele, simultan - la limita de curgere. In acest moment, siatemul devine un mecanism. Dăm o deplasare virtuală nodurilor 3 şi 7, conform figurii de mai jos şi scrim ecuaţia de lucru mecanic virtual.

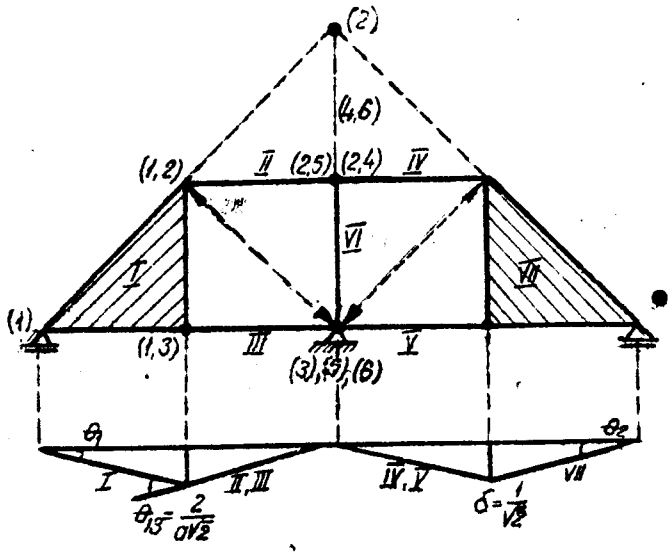


Fig. 5o

$$P_{lim}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = S_{34}\cdot 1;$$

$$P_{lim} = 1{,}41.A.\sigma_c$$

$$= \frac{P_{lim}}{c} = 1{,}41.A.\frac{\sigma_c}{c}$$

Economia obţinută faţă de cazul 1, este de 16,5%

./.

CAPITOLUL II. FORFECARE. IMBINARI

La piesele cu secţiune mică, supuse la forfecare (nituri, sudură, buloane, pene etc.) - se admite că eforturile unitare (τ) se repartizează uniform pe secţiune, după legea:

$$\tau = \frac{T}{A} \cdot \left(\frac{kG}{cm^2}\right)$$

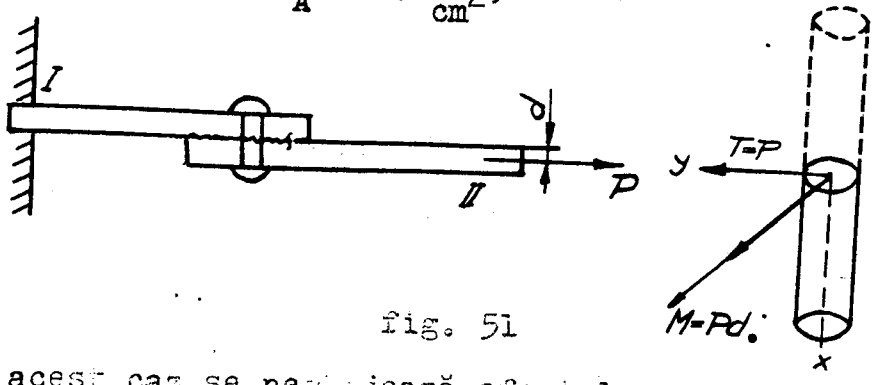


fig. 51

In acest caz se neglijează efectul momentului încovoietor,

- Pentru dimensionarea unei secţiuni, folosim formula:

$$A_{nec} = \frac{m}{\tau_{adm.}} \cdot (cm^2)$$

- Pentru stabilirea capacităţii de încărcare:

$$T = A_{ef} \times \tau_a \cdot \quad (kG)$$

Aplicaţii la solicitarea la forfecare

I. Imbinările nituite - îmbinări de rezistenţă pentru transmiterea eforturilor de la o piesă la alta.

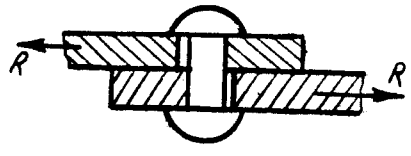


Fig. 52

Ruperea unui nit [illegible] se produce:

a. Din cauza încovoierii tijei [illegible] lui şi [illegible] secundar).

b. Din cauza forfecării tijei.

Efortul maxim pe care-l [illegible] nit, ţinînd seama de numărul secţiunilor de forfecare (m).

$$N^1_{cap} = m \times \frac{\pi}{4} \cdot \tau_a \cdot$$

c. Din cauza strivirii suprafeţelor de contact dintre nituri şi lăcaşul găurilor.

In acest caz, efortul capabil al nitului, la strivire (presiune pe gaură) devine:

$$N_{cap} = d \times \delta_{min} \times \sigma_{as} \cdot$$

./.

Unde: δ_{min} - grosimea totală minimă pe care se exercită presiunea.

- In prima fază de solicitare (frecările dintre plăci echilibrează forţa exterioară), niturile nu se încarcă egal.

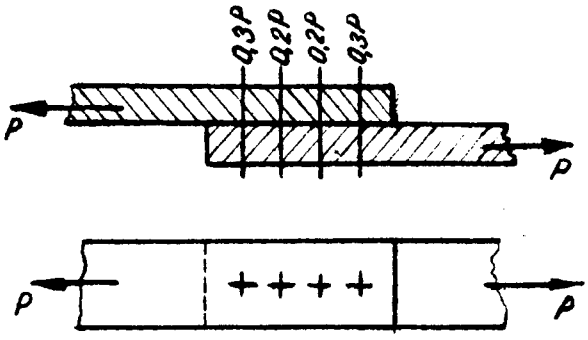


Fig. 53

- In fazele următoare, niturile cele mai solicitate intră în curgere (nu se mai încarcă) şi sporurile de forţă exterioară se repartizează celorlalte nituri.

Practic, calculăm nituirea în faza distrugerii ei, aşa că admitem că niturile unei îmbinări preiau din forţa exterioară aceeaşi cotă,

$$R_{nit} = \frac{P}{n}$$

n - numărul niturilor

Diametrul niturilor se alege funcţie de grosimea tablelor de strîns (tabela 2.4.), astfel încît să avem o dimensionare economicoasă:

$$N^1_{cap} \cong N^2_{cap.}$$

Pentru ca îmbinarea să reziste, trebuie ca:

$$N_{cap.min} \geqslant R_{nit}$$

Numărul de nituri necesare se alege funcţie de capacitatea portantă a barei. Astfel,

a. Pentru barele întinse,

$$n = \frac{A_{net} \times \sigma_a}{N_{cap.min.}}$$

b. Pentru barele comprimate:

$$n = \frac{\varphi_x \, A_{brut_x} \sigma_a}{N_{cap.min}}$$

./.

Unde: φ - coeficientul de falmbaj (subunitar)

- efortul rezultant în nitul cel mai solicitat (de coordonate, "a" şi "b") al unei nituri supuse la un moment şi o forţă.

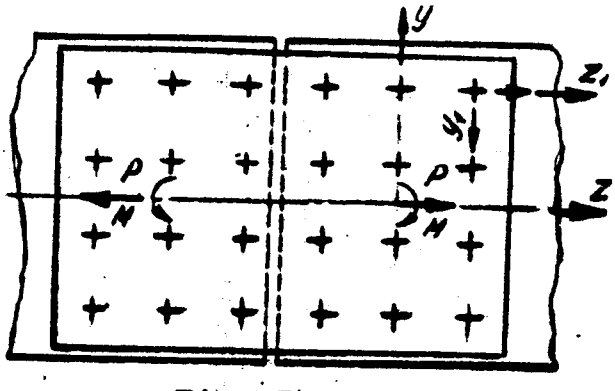


Fig. 54.

$$N = \sqrt{\left[\frac{P}{n} + \frac{Mb}{\Sigma(y_i^2 + z_i^2)}\right]^2 + \left[\frac{Ma}{\Sigma(y_i^2 + z_i^2)}\right]^2}$$

II. Imbinările bulonate

- La calculul unei astfel de îmbinări supuse la un moment încovoietor, se va ţine seama că buloanele nu pot transmite compresiuni în lungul tijei (contact imperfect dintre tije şi pereţii găurii) şi deci presiunile din zona comprimată se transmit prin contactul dintre piese.

Buloanele din zona întinsă iau eforturile de întindere.

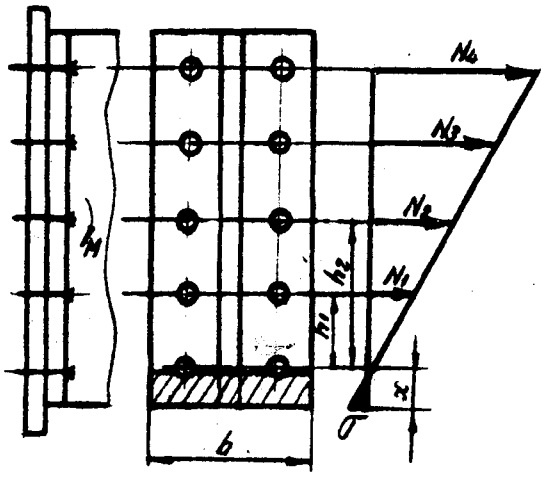


Fig. 55

Efortul în bulonul cel mai îndepărtat (considerînd două şiruri de buloane), este:

$$N_{max}^{1} = \frac{M \cdot h_{max}}{2\Sigma h_i^2}$$

./.

In cazul în care îmbinarea este solicitată şi de o forţă tăietoare, aceasta produce în buloane un efort de forfecare

$$N^2 = \frac{T}{n}$$

Efortul unitar de comparaţie în bulonul cel mai solicitat, în acest caz (solicitare compusă, vezi cap. VII), va fi:

$$\sigma_{ef} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_a$$

Unde:

$$\sigma = \frac{N'_{max}}{\frac{\pi d^2}{4}} \quad ; \text{şi} \quad \tau = \frac{N^2}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

III. Imbinările sudate

a. Sudările în adîncime se calculează ca orice secţiune a piesei, comparaţia făcîndu-se cu rezistenţa admisibilă a sudurii.

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{b \times t} \leq 0{,}8 \cdot \sigma_a$$

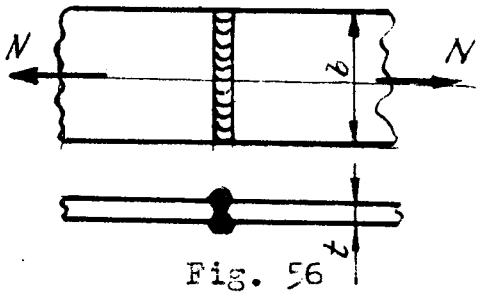


Fig. 56

- La un cordon de sudură cap la cap, înclinat cu un unghiu α (fig. 57) a cărei lungime de calcul este:

$$l_\alpha = \frac{b}{\cos\alpha} - 2t$$

unde:, t - grosimea piesei

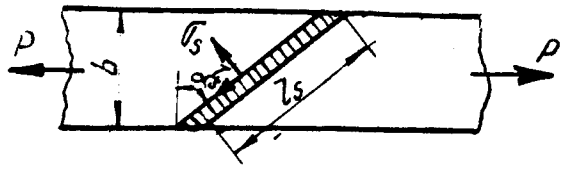


Fig. 57

Eforturile unitare de întindere şi forfecare sînt:

$$\sigma = \frac{P\cos\alpha}{t\left(\frac{b}{\cos\alpha} - t\right)} = \frac{P\cos^2\alpha}{(b - 2t\cos\alpha)t}$$

$$\tau = \frac{P\sin\alpha}{t\left(\frac{b}{\cos\alpha} - 2t\right)} = \frac{P\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{(b - 2t\cos\alpha)t}$$

Se va face şi o verificare la solicitări compuse. (Vezi cap.VII)

b. Sudurile în relief (de colţ). Distribuţia eforturilor în ele este complexă.

- Stabilirea elementelor de calcul.

./.

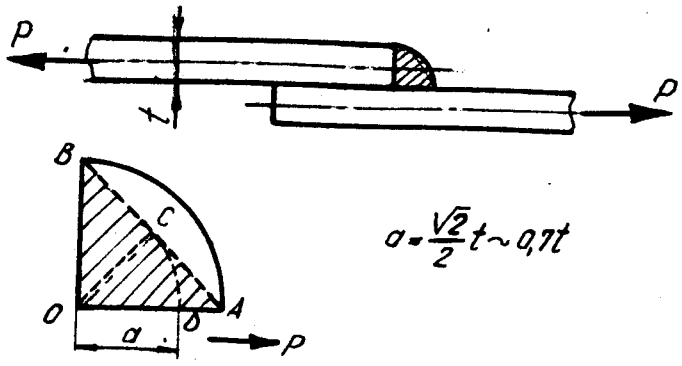


Fig.58.

Grosimea sudurii "a" se obţine rabatînd pe direcţia efortului P, înălţimea oc a triunghiului dreptunghic-isoscel OAB.

Lungimea sudurii (de calcul) - "l_c" este cea efectivă minus două grosimi ale cordonului:

$$l_c = l = l_s - 2a.$$

Sudurile de colţ se fac:

- frontale, adică perpendiculare pe direcţia aplicării sarcinii. E solicitată la forfecare şi tensiune. In practică se evită.
- de flanc (laterale), adică paralele cu direcţia efortului.

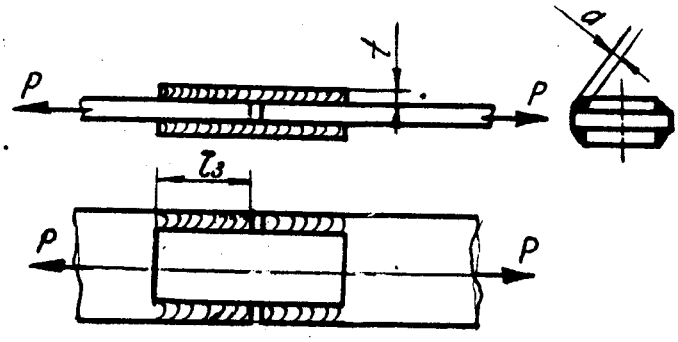


Fig.59.

E solicitată la forfecare:

$$\tau_{ef.} = \frac{P}{n.o,7\ t.l_3}$$

Unde, n - numărul de cordoane identice asupra cărora se aplică forţa totală. (în cazul figurii de mai sus, n=4)

./.

... se sudează o cornieră de ... de sudură se fac neegale, pentru ca ... de ele să treacă prin centrul de greutate ...

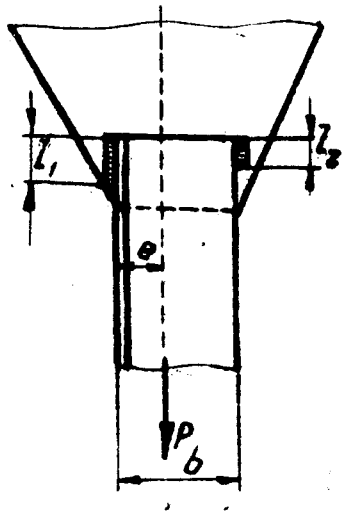


Fig.6o.

Deci,

$$l_1 \cdot e = \dots$$

$$l = l_1 + l_2 = \frac{\dots}{\dots \cdot \sigma_{as}}$$

Scoatem necunoscutele ... (lungimi de calcul).

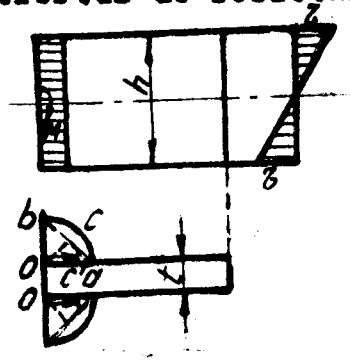
-.Suduri supuse la ...

a.- La sudurile în ..., calculul se face ca pentru o secțiune oarecare a piesei metalice, adică:

$$\sigma_{max.} = \frac{M}{W} = \frac{6M}{th^2} \leq 0{,}85 \cdot \sigma_a.$$

b.- La sudurile în relief, efortul de forfecare maxim este dat de relația:

$$\tau = \frac{6M}{2ah^2} \leq 0{,}65 \cdot \sigma_a.$$



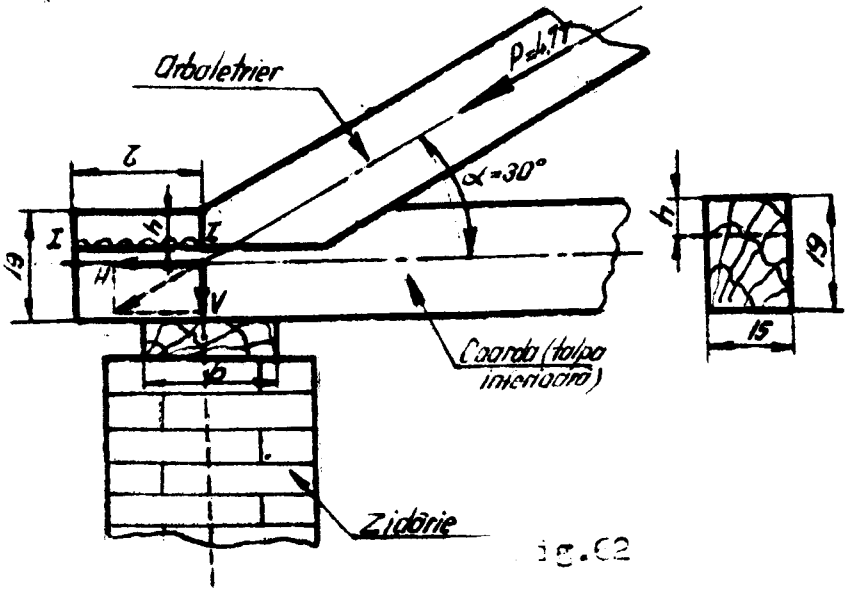


Fig.62

2.1. Să se dimensioneze îmbinarea chertată cu prag dintre arbaletrierul şi coarda unei ferme de acoepriş din lemn de brad, conf.fig.de mai sus, forţa de compresiune în arbaletrier este P = 4,7o Tone.

Se dau: - rezistenţa admisibilă la compresiune,

a. paralel cu fibrele: $\sigma_a = 1oo \frac{k6}{cm^2}$

b. perpendicular pr fibre: $\sigma_a = 15 \frac{k6}{cm^2}$

- rezistenţa admisibilă la forfecare:

$$\tau_a = 18 \frac{k6}{cm^2}$$

Descompunem sarcina P în două componente:

$$H = 4,7 \times \cos 3o^o = 4,o6 \text{ T.}$$

$$V = 4,7 \times \sin 3o^o = 2,35 \text{ T.}$$

- Adîncimea " h " a pragului.

Forţa orizontală H acţionează asupra pragului şi tinde să-l strivească pe suprafaţa (15.h) cm^2

Faţa pragului care aparţine corzii este solicitată la compresiune în lungul fibrelor ($\sigma_a = 1oo \frac{k6}{cm^2}$), iar faţa pragului care aparţine arbaletrierului este solicitată la compresiune sub un unghi $\alpha = 3o^o$ faţă de direcţia fibrelor arbaletrierului ($\sigma_{a\alpha}$).

Formula (dedusă experimental) care ne dă rezistenţa admisibilă la compresiune pentru o direcţie de solicitare care face un unghi α cu direcţia fibrelor este:

$$\sigma_{a\alpha} = \frac{\sigma_{a''}}{1 + \left(\frac{\sigma_{a''}}{\sigma_{a\perp}} - 1\right) \sin^3\alpha}$$

In cazul de faţă,

$$\sigma_{a,\alpha=31} = \frac{1oo}{1 + \left(\frac{1oo}{15} - 1\right) \cdot o,5^3} = 58,5 \frac{k6}{cm^2}$$

Vom lucra cu rezistenţa admisibilă cea mai mică (58,5). Deci:

$$A_{nec} = \frac{H}{\sigma_{a\alpha}} = \frac{4o6o}{58,5} = 69,7 \text{ cm}^2.$$

$15 \times h = 69,7 \text{ cm}^2$; $h = 4,65$ cm

Alegem rotund: h = 5 cm.

. / .

In practică, adîncimea "h" a pragului se alege constructiv ca fiind:

$$h = \left(\frac{1}{3} \div \frac{1}{4}\right) \cdot H$$

- lungimea " l " a pragului.

Arbaletrierul tinde să foarfece coarda şi să lunece pe planul 1-1 paralel cu fibrele corzii, datorită împingerii H. Trebuie ca lungimea "l" să fie suficient de mare pentru ca fenomenul de forfecare să nu se producă.

Deci:

$$A_{nec} = \frac{H}{\sigma_a} = \frac{4060}{18} = 225 \text{ cm}^2.$$

$$15 \times l = 225.$$

Rezultă, $l \geq 15$ cm.

Constructiv, " l " se alege (15 ÷ 20) cm. pentru a crea astfel şi o straşina care să protejeze construcţia în caz de ploaie.

- Va trebui să verificăm şi coarda la tensiune (σ_a = 100 kG/cm^2) în secţiunea slăbită.

$A_{net} = (19 - 5) \times 15 = 210$ cm^2.

Deci, $\sigma_{ef} = \frac{H}{A_{net}} = \frac{4060}{210} = 19{,}4 \frac{kG}{cm^2} < \sigma_a$.

- De asemeni să calculăm lăţimea necesară " b " a piesei de reazim (de sub nodul fermei), pentru ca aceasta să nu se strivească sub acţiunea sarcinii V.

Deci,

$$A_{nec} = \frac{V}{\sigma_{a\ scr}} = \frac{2370}{15} = 157 \text{ cm}^2$$

$$15 \times b = 157; \quad b = 10{,}4$$

Alegem constructiv: b = 15 cm (se taie dintr-o grindă 15×15).

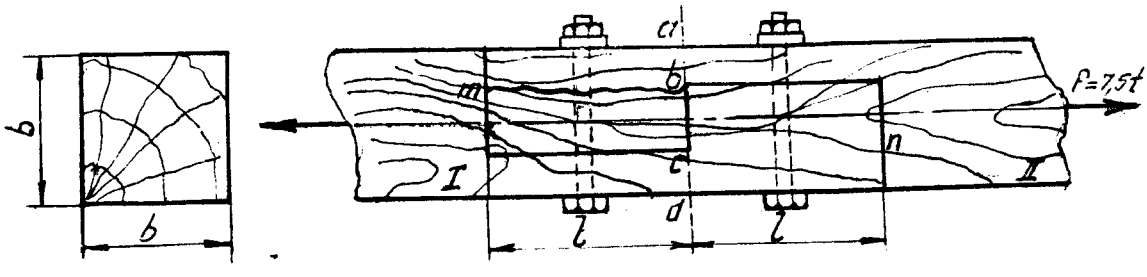


Fig.63.

./.

2.2. Înădirea unei tălpi a unei ferme, supuse la tensiune (P=7500 kg), se realizează cu ajutorul unor praguri (bulcane de montaj).

Să se dimensioneze îmbinarea (h,l) şi secţiunea barei (pătrate, latura b).

- Dimensionăm bara (I sau II) din condiţia ca în secţiunea slăbită (cd sau ab) să reziste la tensiune (σ_a = 100 $\frac{kG}{cm^2}$)

Deci, la limită:

$$A_{nec} = \frac{P}{\sigma_a} = \frac{7.500}{100} = 75\ cm^2.$$

$$\frac{b - h}{2} \times b = 75$$

$$b^2 - bh = 150 \quad (1)$$

In secţiunea bc, pragul trebuie să reziste la compresiune în lungul fibrelor (σ_a = 100 $\frac{kG}{cm^2}$), pe înălţimea h .

Deci,

$$A_{nec} = \frac{P}{\sigma_{aH}} = \frac{7500}{100} = 75\ cm^2.$$

$$h \times b = 75 \quad (2)$$

Rezolvăm acest sistem şi găsim cele două necunoscute.

$$\begin{array}{l} b = 15\ cm \\ h = 5\ cm \end{array} \quad (\text{se observă că: } h \sim \frac{b}{3})$$

- Presupunînd că pragul nu se striveşte, trebuie să luăm măsuri pentru ca lemnul să nu se foarfece pe suprafaţa mb sau (cn).

Se dă: τ_{af} = 20 $\frac{kG}{cm^2}$

Deci. $A_{nec} = \frac{P}{\tau_a} = \frac{7500}{20} = 375\ cm^2$

$$15 \times l = 475$$

Rezultă, l = 25 cm.

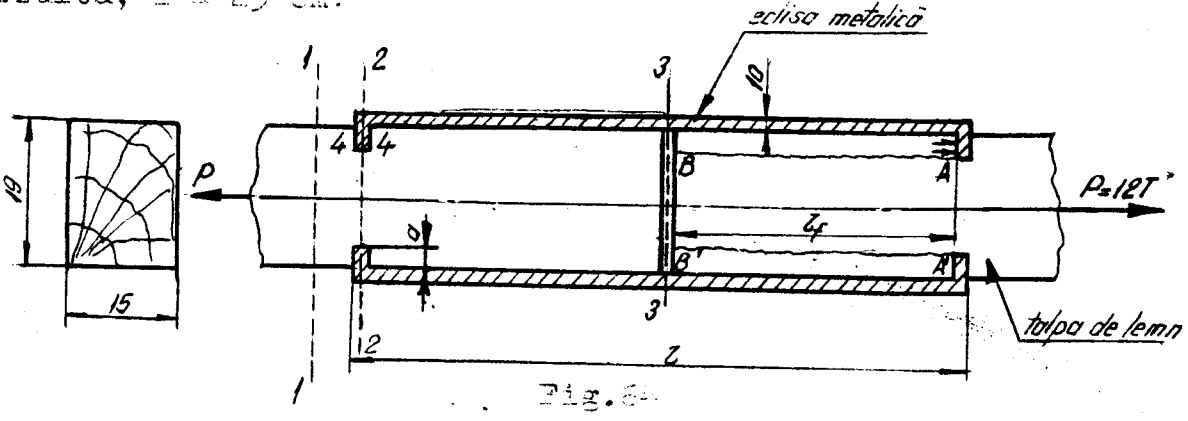


Fig.8

2.3. Înădirea tălpii inferioare a fermei se execută cu ajutorul a 2 eclise metalice - ca în fig. de mai sus. Să se calculeze lungimea "l" și adîncimea "a" a ecliselor.

- Lungimea "l" se determină din condiția ca lemnul să nu se foarfece de-a lungul secțiunii AB, pe lungimea l_f.

Avem două secțiuni de forfecare (AB și A'B')

Deci, suprafața de forfecare va fi:

$$A = 2 \times 15\, l_f = 30.l_f \ (cm^2).$$

Efortul:

$$\tau_{f,II} = \frac{12.000}{30.l_f} = 12\ KG/cm^2 (\tau_{adm})$$

Rezultă: $l_f = 33{,}3$ cm.

Alegem, $l_f = 34$ cm $\rightarrow l = 2l_f + 2$.

$l = 70$ cm.

Eclisa se va face din tablă groasă: 10 x 150-760 mm

- Trebuie ca lemnul să nu se strivească pe suprafața AA (respectiv A'A') Avem 2 secțiuni de strivire.

$$A = 2 \times 15a = 30.a \ (cm^2)$$

$$\sigma_{str.II} = \frac{12.000}{30.a} = 100\ kG\ cm^2 \ (\sigma_{adm}\ II)$$

Rezultă: a = 4 cm

- Verificarea la tensiune a tălpii, în secțiunea slăbită (22)

$$A_{net} = 15 \times (19 - 8) = 165\ cm^2$$

Efortul efectiv maxim va fi:

$$\sigma_{22} = \frac{12.000}{165} = 73\ kG/cm^2 < \sigma_{adm}$$

- Verificarea la tensiune a eclisei, în secțiunea 3-3

$$A = 2 \times 15 \times 1 = 30\ cm^2.$$

$$\sigma_{33} = \frac{12000}{30} = 400\ kG/cm^2 < \sigma_{adm} = 1.400\ kG/cm$$

- Verificarea la forfecare a eclisei, în secțiunea 4-4

Avem 2 secțiuni de forfecare (sus și jos)

$A = 2 \times 15 \times 1 = 30\ cm^2$.

$$\tau_{44} = \frac{12000}{30} = 400\ kG/cm^2 < \tau_{adm} = 1200\ kG/cm^2.$$

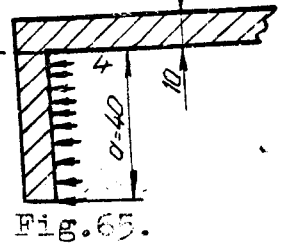


Fig.65.

./.

2.4. Două grinzi de lemn (15 x15 cm), sînt aşezate cap la cap şi îmbinate cu două eclise de oţel şi buloane (Ø 20 mm).

Ele sînt solicitate la întindere de forţa axială N = 10,0 T (ca în figura alăturată).

Se cere să se dimensioneze eclisele şi să se determine numărul necesar de buloane (ele se vor pune pe un singur rînd)

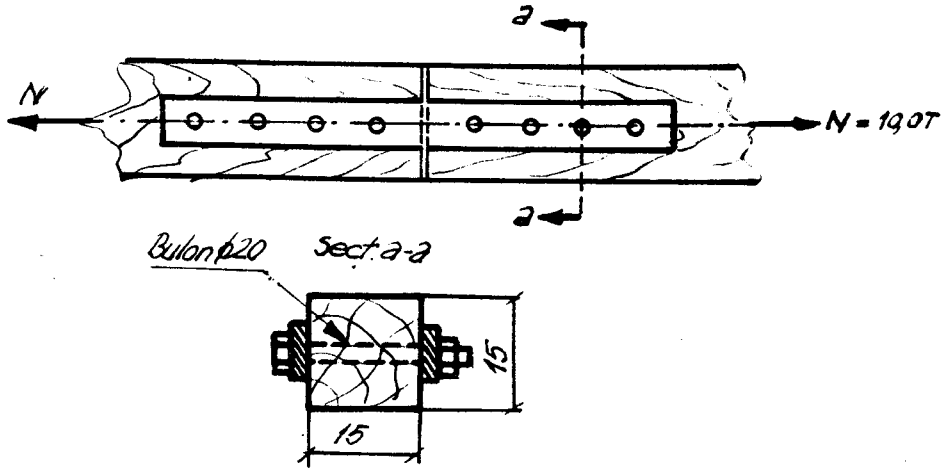


Fig. 66

Verificăm grinda de lemn (15x15) dacă ţine la tensiune în secţiunea slăbită de bulon

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A_{net}} = \frac{10000}{15x(15-2)} = \frac{10000}{195} = 51 \frac{kG}{cm^2} < \sigma_a \text{ gr.}$$

La această secţiune vom dimensiona îmbinarea.

- Secţiunea necesară a unei eclise

$$A_{nec}^{ecl} = \frac{N}{2.\sigma_{a\ ecl}} = \frac{10000}{2 \times 1400} = 3,57 \text{ cm}^2$$

Alegem grosimea eclisei: $\delta = 10$ mm

Ţinînd seama de slăbirea produsă de gaura de bulon, rezultă lăţimea "b" a eclisei.

$$(b-d) \cdot \delta = A_{nec}^{ecl}$$

$$b = \frac{A_{nec}}{\delta} + d = \frac{3,57}{1} + 2 = 5,57 \text{ cm}$$

Rotund, b = 60 mm.

- Numărul de buloane se calculează din considerații de forfecare a bulonului sau strivire a lemnului.

a) Bulonul lucrează cu 2 secțiuni de forfecare:

$$n = \frac{N}{2\frac{\pi d^2}{4}\sigma_{af}} = \frac{10.000}{2 \times \frac{3,14 \times 2^2}{4} \times 1.120} = 1,42$$

b) Strivirea între bulon și lemn

$$n = \frac{N}{d.l.\sigma_{as}} = \frac{10.000}{2 \times 15 \times 100} = 3,3.$$

Alegem: n = 4 buloane de fiecare parte a capetelor barelor de lemn.

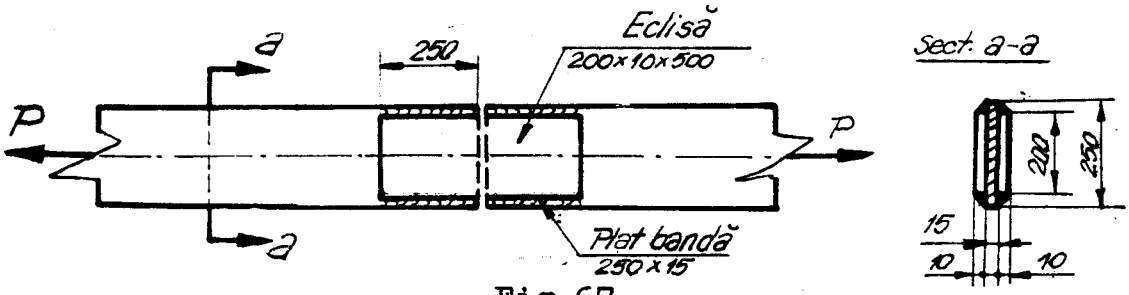


Fig.67.

2.5. 2 platbande în prelungire înădite cu eclise prinse cu suduri de colț laterale, sînt tensionate cu o forță "P". Să se calculeze înădirea (sudarea, lungirea eclisei) la efortul capabil al piesei.

- Sarcina maximă pe care o poate prelua piesa (platbanda), este:

$$P_{cap.} = (1,5 \times 25) \times 1.400 = 52.500 \text{ kG.}$$

- Grosimea sudurii se poate alege între limitele:

$a_{min} = 4$ mm

$a_{max} = 0,7 \times \delta_{min} = 0,7 \times 10 \text{ mm} = 7 \text{ mm.}$

Alegem o sudură: a = 6 mm.

Rezistența admisibilă a sudurii la forfecare:

$$\sigma_a = 910 \frac{kG}{cm^2}$$

- Lungimea de calcul (l_c) a unui cordon de sudură (lateral), este:

$$l_c = \frac{P_{cap}}{4 \times a \times \sigma_a} = \frac{52.500}{4 \times 0,6 \times 910} = 24 \text{ cm.}$$

./.

Lungimea reală a cordonului de sudură:

$$l = l_c + 2a = 24 + 2 \times 0{,}6 = 25{,}0 \text{ cm.}$$

Vom alege o eclisă lungă de 0,30 m.

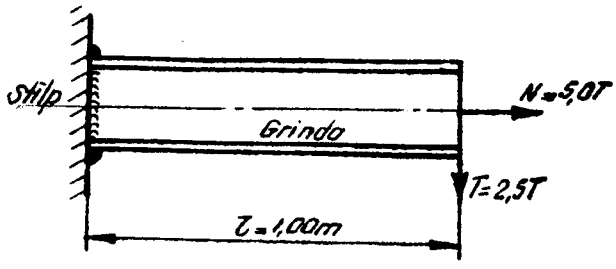


Fig.68.

2.6. Grinda din figură (profil I 30) este sudată cu sudură în relief, pe contur (a = 4 mm) de stîlp.

Să se calculeze efortul "τ_{max}" care se dezvoltă în sudura inimii grinzii.

Schema statică a grinzii este următoarea:

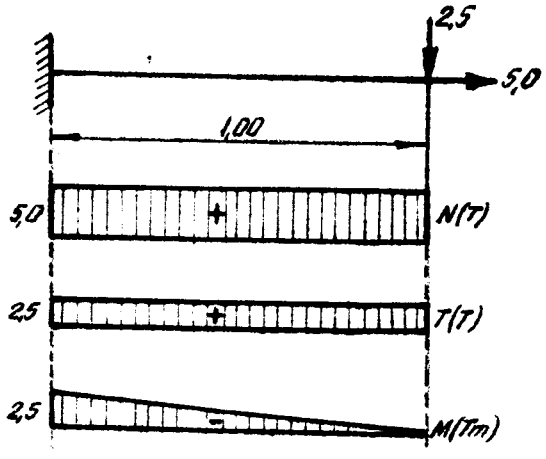


Fig.69.

Aproximăm secţiunea grinzii din încastrare ca fiind compusă din 3 dreptunghiuri (2 tălpi şi o inimă), cu dimensiunile din tabelă. Ea este sudată pe contur cu Δ 4 mm, ca în fig. de mai sus.

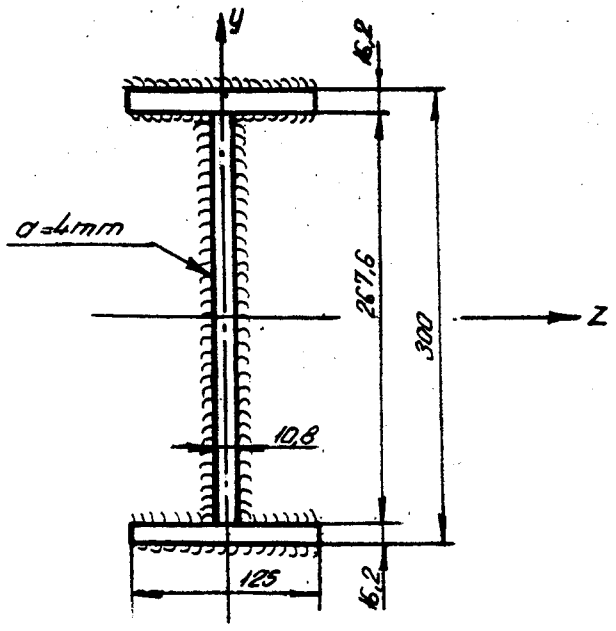


Fig.7o.

- Caracteristicile geometrice ale sudurii tălpilor şi inimii.

$$A_{in.} = 1 \times o,4 \times 26,76 = 21,4o \text{ cm}^2$$

$$A_{total} = 2 \times o,4\,(26,76 + 12,5o + 5,71 \times 2) = 4o,5o \text{ cm}^2$$

$$I_z = 2 \times \left(\frac{26,76^3 \times o,4}{12} + \frac{12,5 \times o,4^3}{12} + 2 \times \frac{5,71 \times o,4^3}{12} + \right.$$

$$\left. + 2 \times o,4 \times 15,2^2 + 2 \times 5,71 \times o,4 \times 13,18^2\right) = 5.14o \text{ cm}^4.$$

- Tensiunea în sudură datorită forţei axiale "N".

$$\tau_1 = \frac{N}{A_{total}} = \frac{5.ooo}{4o,5o} = 124 \ \frac{kG}{cm^2}$$

- Tensiunea în sudură, datorită momentului încovoietor "M", la marginea extremă a inimii (la contactul cu talpa superioară - pct.A)

$$\tau_2 = \frac{M}{I_z} \times y = \frac{25o.ooo}{5.14o} \times 13,38 = 645 \ \frac{kG}{cm^2}$$

Ambele eforturi (τ_1 şi τ_2) fiind la fel orientate, le putem aduna (în punctul A):

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = 124 + 645 = 769 \ \frac{kG}{cm^2}$$

Tensiunea tangenţială medie în cusăturile verticale ale inimii, produsă de forţa tăietoare "T".

$$\tau' = \frac{T}{A_{in}} = \frac{2.500}{21,4} = 117 \ \frac{k_G}{cm^2}$$

(sudura tălpilor lucrează prost la sarcina "T", perpendiculară pe ea).

- Tensiunea rezultantă, în sudura cea mai solicitată (pct.A) este:

$$\tau_{max.} = \sqrt{\tau^2 + \tau'^2} = \sqrt{769^2 + 117^2} = 784,5 \ \frac{k_G}{cm^2}$$

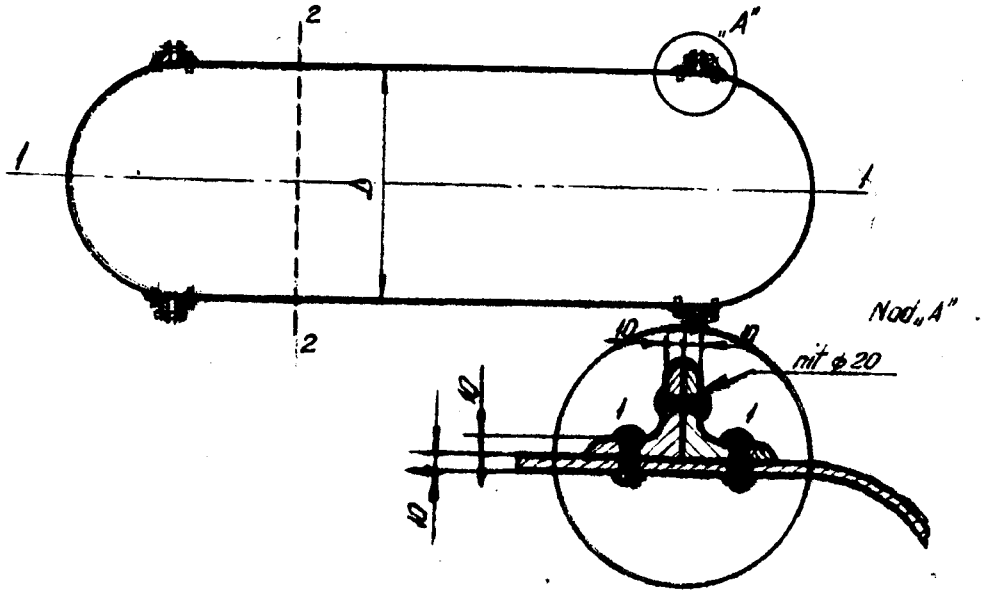


Fig.71.

2.7. Pereţii cazanului circular sînt legaţi cu fundul, cu ajutorul cornierelor nituite - conf.fig.de mai sus.

Diametrul cazanului este D = 1,oo mm grosimea pereţilor t = 1o mm; presiunea din interior p = 1o atm.

1.- Să se verifice eforturile unitare care apar în pereţii cazanului.

2.- Să se afle numărul de nituri "n".

1,- Verificarea eforturilor unitare.

a.- Eforturile (σ) care se nasc în pereţii circulari ai cazanului - nu trebuie să depăşească rezistenţa admisibilă.

./.

Despărțim cu pl. l- - - o jumătate de cilindru.
Din acestea, separăm cu 2 plane - normale pe axă - porțiune de l cm (lățimea)

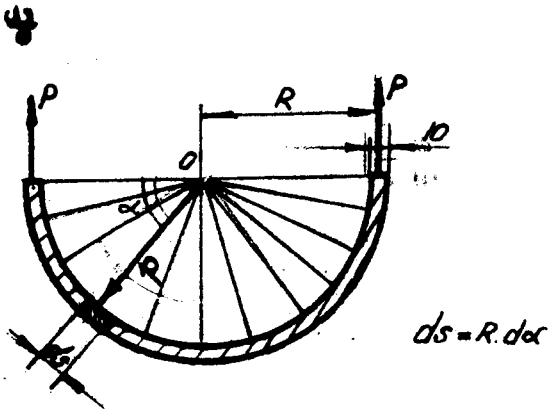


Fig.

Putem o proiecție pe verticală

$$2P = \int_0^{\pi} p \cdot l \cdot R\, d\alpha \cdot \sin\alpha$$

$$2P = 2pR$$

Rezultă,

$$P = pR = p \cdot \frac{D}{2} = 10 \times 50 = 500 \text{ KG}$$

Eforturi unitar:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{500}{1 \times 1} = 500 \ \frac{kG}{cm^2} < \sigma_{adm} \ (1400)$$

b.- Secțiunea 2.2.

Sect. 2-2

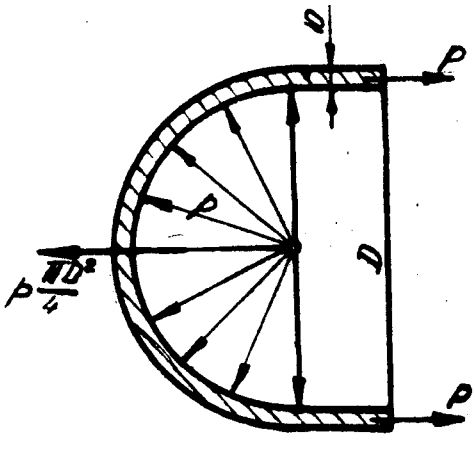


Fig.73.

Presiunea exercitată asupra fundului circular (p. $\frac{\pi D^2}{4}$) trebuie să fie preluată de reacţiunea (P) ce apare în lungul peretelui cazanului.

$$P = p. \frac{\pi D^2}{4}$$

- Secţiunea ce preia această forţă (P)

$$A = \pi Dt.$$

Efortul unitar este:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{p\pi D^2}{4 \pi Dt} = \frac{pD}{4t}$$

La noi:

$$\sigma = \frac{1ox1oo}{4 \times 1} = 25o \ \frac{kG}{cm^2} < \sigma_{adm.}$$

2. Forţa care apasă pe capacul cazanului (F) - este:

$$F = p \ (\frac{kG}{cm^2}) \times A \ (cm^2)$$

La noi:

$$F = 1o \times \frac{3,14x1oo^2}{4} = 78.5oo \text{ kG} = 78,5 \text{ Tone.}$$

Nitul 1 este solicitat la forfecare ($\tau_{adm} = 1.12o \ \frac{kG}{cm^2}$) şi strivire ($\sigma_a = 2800 \ \frac{kG}{cm^2}$).

a. la forfecare: $R_{cap.\ 1} = 1x \frac{3,14 \times 2^2}{4} \times 1.12o \cong 3.5oo \text{ kg} = 3,5T.$

b. la strivire: $R''_{cap} .1 = 1 \times 2x \ 2.8oo = 5.6oo \text{ kG} = 5,6 \text{ T.}$

Cea mai mică rezistenţă capabilă este 3,5 T.

- Numărul de nituri necesar:

$$n = \frac{F}{R_{min}} = \frac{78:5}{3,5} = 23 \text{ bucăţi.}$$

./.

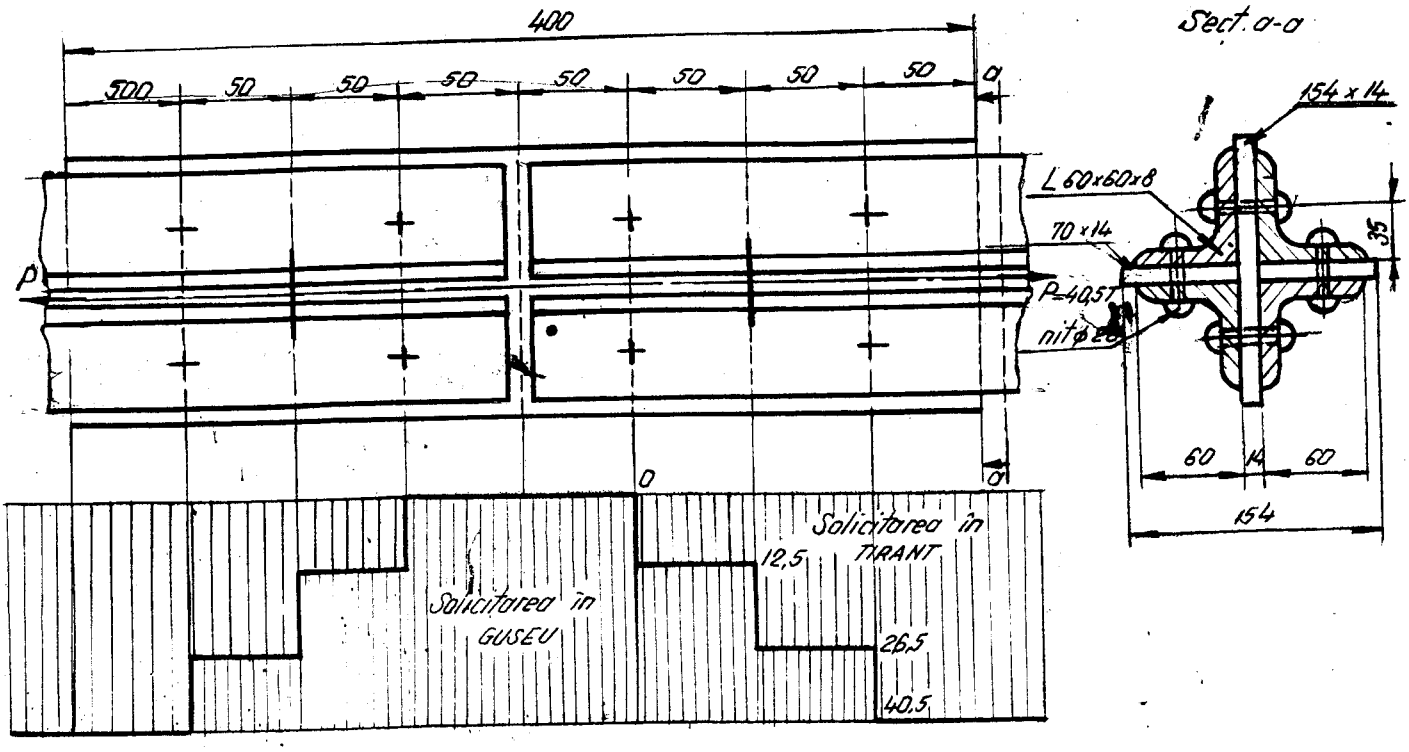


Diagrama transmiterii solicitării

Fig.74.

2.8. Se dă tirantul din fig.de mai sus compus din patru profile - cornier cu aripi egale, supus la o forţă de tensiune P = 40,5 T. Se cere:

1, Să se dimensioneze secţiunea tirantului.

2, Să se calculeze înădirea nituită dintre cornire.

3. Să se verifice tirantul şi guseul de înădire în secţiunea slăbită.

1. Alegem secţiunea tălpii dintr-un profil I; lucrăm cu un efort σ_a redus = 1.200 $\frac{kG}{cm^2}$, pentru că nu cunoaştem slăbirile produse de găurile de nit.

$$A_{nec} = \frac{P}{\sigma_{ar}} = \frac{40500}{1200} = 33,80 \text{ cm}^2$$

Alegem: 4 L 60x60x8 $\rightarrow A_{ef}$ = 4 x 9,03 = 36,12 cm^2.

2. Vom transmite efortul între cele 4 profile (tirantul) care le întrerupem în aceeaşi secţiune - prin intermediul guseului.

Alegem diametrul nitului funcţie de grosimea celei mai subţiri piese din pachet (conf.tabelei 2.4)

$$\delta_{guseu} = 14 \text{ mm}$$

$$\delta_{cornier} = 8 \text{ mm}$$

Alegem nit Ø 20 mm.

- Capacitatea de încărcare a unui nit (se compară rezistenţa lui de forfeçare şi presiunea pe gaură).

a. La forfecare.

$$R_1 = m \frac{\pi d^2}{4} \tau_{af} = 2 \times \frac{3,12 \times 2^2}{4} \times 1120 = 7034 \text{ kg}$$

Nitul lucrează cu două secţiuni de forfecare (m = 2)

b. La presiunea pe gaură (strivire) :

$$R_2 = d \delta_{min} \sigma_{as} = 2 \times 1,4 \times 2.800 = 7820 \text{ kg}$$

Deci ,

$$R_{cap.nit} = R_1 \cong 7,0 \text{ T.}$$

- Numărul necesar de nituri pentru transmiterea forţei P = 40,5 T, este :

$$n = \frac{P}{R_{c.n.}} = \frac{40.500}{7.030} = 5,8$$

Alegem rotund n = 6 buc şi le distribuim câte 2 buc. nituri într-o secţiune slăbită. Distanţa dintre nituri o luăm conf. tabelei de la sfîrşitul problemei II-9.

Niturile care prind cele două aripi ale aceleaşi corniere le punem decalat pentru a nu slăbi secţiunea.

Pentru a da posibilitatea unei bune operaţii de nituire (introducerea buterolei), niturile se aşează pe o linie la o distanţă (0,5 b + 5 mm), de la muchia cornierei. (fig. 75)

In figura iniţială s-a trasat diagrama transmiterii efortului de la piesa de bază (tirant) la guseu prin intermediul niturilor.

3. Verificarea tirantului în secţiunea slăbită

$$A_{net} = 4 \ (9,03 - 2 \times 0,8) = 29,72 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A_{net}} = \frac{40.500}{29,72} = 1.365 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} < 1.400$$

Verificarea guseului

rp

$A_{net}=1,4x(15,4+14,0)-2x1,4x2=35,5\ cm^2$

$$\sigma_{max}=\frac{P}{A_{net}}=\frac{40.500}{35,5}=1.140\ \frac{KG}{cm^2}<1.400$$

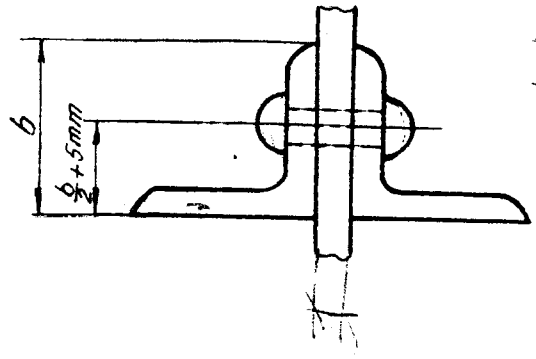


Fig. 75

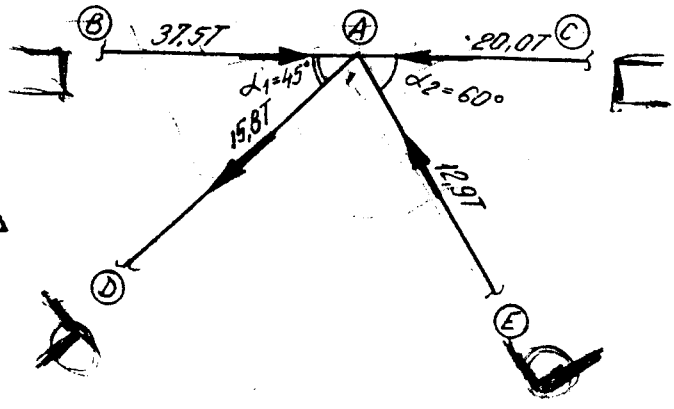


Fig. 76

2.9. Se dă schematic nodul A al unei grinzi cu zăbrele Se cere :

1.- Să se dimensioneze barele care intră în nod din profile metalice laminate, în două ipoteze

a) îmbinarea sudată

b) îmbinarea nituită

2.- Să se dimensioneze îmbinarea în cele două variante de mai sus.

- Spaţiul liber dintre profile este : δ = 12 mm

Tălpile AB şi AC, precum şi diagonala AE sînt comprimate; diagonala AD este întinsă. Deoarece în cazul barelor comprimate intervine în plus fenomenul de pierderea stabilităţii (vezi cap. IX), vom lucra în cazul acestora cu or rezistenţă admisibilă redusă (σ_a = 1.200 $\frac{kg}{cm^2}$) urmînd ca ulterior să putem face un calcul mai exact.

1. a.- Dimensionarea barelor în cazul îmbinării lor în nodul A cu sudură. Nu avem slăbiri în secţiunea pieselor.

- Talpa AB

$$A_{nec}=\frac{37.500}{1,200}=31,30\ cm^2$$

Alegem : 2 profile U 12 $\rightarrow A_{ef}$ = 2 x 17,00 = 34,00 cm^2 > A_{nec}

rp

- Talpa AC

$$A_{nec} = \frac{20.000}{1.200} = 16,70 \text{ cm}^2$$

Alegem 2 profile U 8 → $A_{ef} = 2 \times 11,00 = 22,00 \text{ cm}^2 > A_{nec}$

- Diagona AE

$$A_{nec} = \frac{12.900}{1.200} = 10,80 \text{ cm}^2$$

Alegem: 2 corniere 50x50x6 → $A_{ef} = 2 \times 5,69 = 11,38 \text{ cm}^2 > A_{nec}$

- Diagona AD.

$$A_{nec} = \frac{15.800}{1.400} = 11,30 \text{ cm}^2$$

Alegem 2 L 50x50x6 → $A_{ef} = 2x5,69 = 11,38 \text{ cm}^2 \cong A_{nec}$

Între profile vom introduce (în nodul A) un guseu de 12 mm grosime

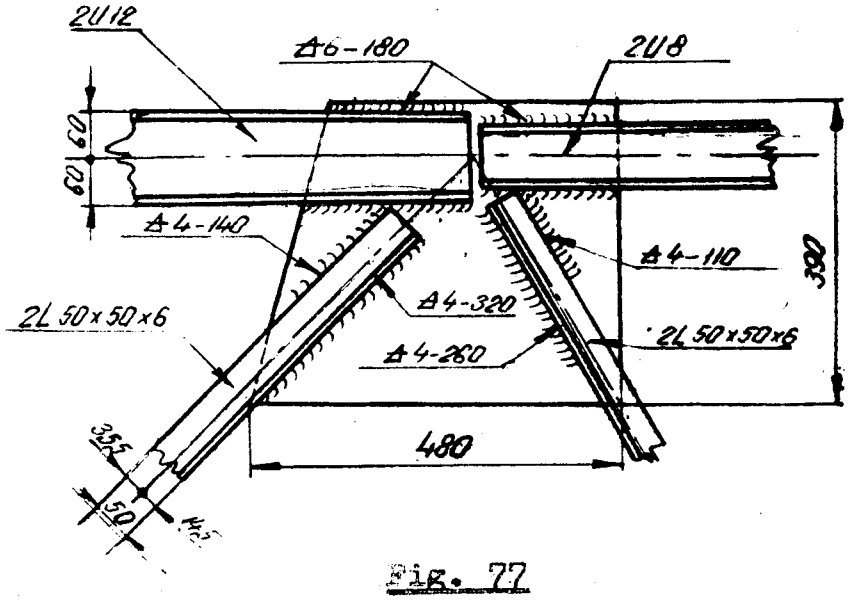


Fig. 77

b). În cazul realizării îmbinării nituite, vom lucra (în formula de dimensionare) cu secţiunea slăbită (netă).

Vom aşeza niturile pe un singur rînd. Alegem grosimea nitului în funcţie de grosimea minimă a pieselor de strîns (6 mm) → nit Ø 17 mm (vezi tabela 2.4.)

$$A_{nit} = \frac{3.14 \times 1,7^2}{4} = 2,27 \text{ cm}^2$$

Verificăm secţiunile alese în cazul I.a. (îmbinare sudată).

- Talpa AC (2 U 12)

$$A_{net} = 34,00 - 2,27 = 31,73 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{ef} = \frac{37.500}{31.75} = 1.180 \frac{kg}{cm^2} < \sigma_a$$

- Talpa AC (2 U 8)

$A_{net} = 22,00 - 2,27 = 19,73 \text{ cm}^2$

$$\sigma_{ef} = \frac{20.000}{19,73} = 1.020 \frac{kg}{cm^2} < \sigma_a$$

- Diagona AE (2 L 50 x 50 x 6)

$A_{net} = 11,38 - 2,27 = 9,11 \text{ cm}^2$

$$\sigma_{ef} = \frac{12.900}{9,11} = 1.420 \frac{kg}{cm^2} > \sigma_a$$

Alegem o secţiune mai puternică :

2 L 50x50x7 $\rightarrow A_{ef} = 2 \times 6,56 = 13,12 \text{ cm}^2$

$A_{net} = 13,12 - 2,27 = 10,85 \text{ cm}^2$

$$\sigma_{ef} = \frac{12.900}{10,85} = 1,190 \frac{kg}{cm^2} \sim \sigma_a$$

- Diagona AD (2 L 50 x 50 x 6)

Este evident că şi în acest caz va trebui să mărim secţiuneaţiunea

Alegem : 2 L 60 x 60 x 6

$A_{ef} = 2 \times 6,91 = 13,82 \text{ cm}^2$ (brut)

$A_{net} = 13,82 - 2,27 = 11,55 \text{ cm}^2$

$$\sigma_{ef} = \frac{15.800}{11,55} = 1.380 \frac{kg}{cm^2} \cong \sigma_a$$

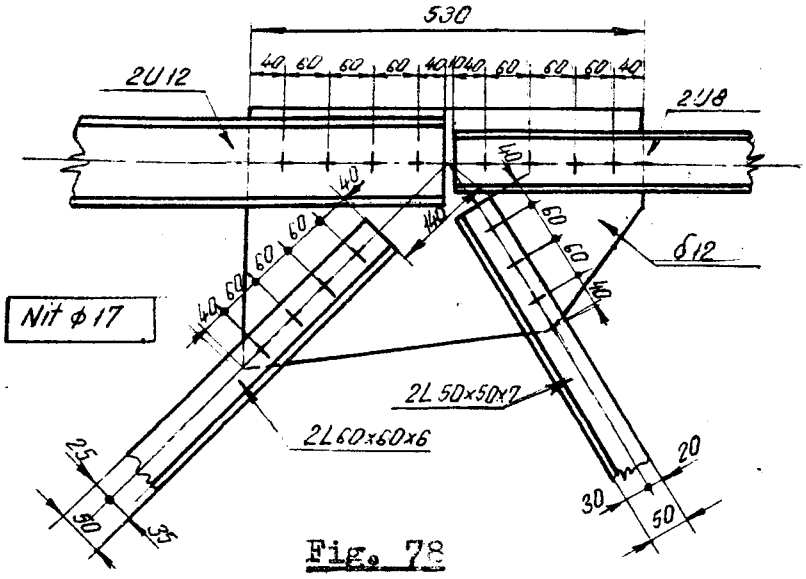


Fig. 78

2. Dimensionarea îmbinării.

Deoarece costul îmbinării este relativ mic faţă de costul barelor de rezistenţă, dimensionăm îmbinarea (sudată, nituită sau bulonată) la efortul capabil al piesei de rezistenţă (principale). Acestea pentru ca în cazul depăşirii sarcinii date îmbinarea să nu se distrugă şi să ţină atît timp cît ţine şi bara de rezistenţă (talpă, diagonală, montant etc.).

In cazul prinderii a două piese colineare, solicitate la efort de acelaş semn, dimensionăm îmbinarea la diferenţa eforturilor.

De asemeni, pentru uşurarea montajului, se obişnuieşte ca joantarea celor două piese colineare să se facă în afara nodului.

a. Imbinarea sudată

Sudăm profilele de guseu cu sudură în relief (de colţ) - talpa (2 U 12)

Alegem grosimea sudurii : a = 6 mm

N = 37,5 - 20,0 = 17,5 Tone

Aflăm lungimea de calcul (l_c) a unui cordon de sudură :

$$l_c = \frac{\Delta N}{2 \times a \times \tau_{as}} = \frac{17.500}{2 \times 0,6 \times 910} = 16 \text{ cm}$$

Lungimea reală va fi mai mare :

$l = l_c + 2a = 16 + 1,2 \cong 18$ cm

Diagonala AD (2 L 50 x 60 x 6)

Alegem grosimea minimă de sudură : a 4 mm

Lungimile celor două cordoane de sudură sînt inegale : cordonul l_1 mai aproape de centrul de greutate al cornierei va fi mai mare decît l_2 mai depărtat, astfel că momentele lor statice faţă de centru să fie egale.

$$l_1 \times e = l_2 \times (b - e)$$

Sau : $l_1 \times 1,45 = 1,2 \times 3,55$ (1)

Lungimea necesară de sudură :

$$l = \frac{N_{cap}}{a \times \tau_{as}} = \frac{11,38 \times 1.400}{0,4 \times 910} = 43,6 \text{ cm.}$$

Deci,

$l_1 + l_2 = 43,6$ (2)

Avem un sistem de 2 ecuaţii (1) şi (2) cu 2 necunoscute (l_1 şi l_2). Il rezolvăm

l_{1c} = 30,9 cm

l_{2c} = 12,7 cm

Acestea sînt lungimile necesare la sudură, de calcul.

Lungimile reale :

$l_1 = l_{1c} + 2a = 30,9 + 0,8 = 31,7 \sim 32$ cm

$l_2 = l_{2c} + 2a = 12,7 + 0,8 = 13,5 \sim 14$ cm

- Diagonala AE (2 L 50 x 50 x6)

Alegem, la fel, a = 4 mm

Făcînd un raţionament similar cu cel de la diagonală AD, obţinem :

$$l_1 \times 1,45 = l_2 \times 3,55 \qquad (3)$$

$$l = l_1 + l_2 = \frac{\varphi \times 11,38 \times 1400}{0,4 \times 910} \cong \frac{13.000}{0,4 \times 910} = 35,7 \text{ cm} \qquad (4)$$

unde :

φ - coeficientul de flambaj (subunitar).

rezolvînd sistemul, obţinem lungimile de calcul :

l_{1c} = 25,3 cm

l_{2c} = 10,4 cm

Lungimile reale : $l_1 = 25,3 + 0,8 = 26,1 \sim 26$ cm

$l_2 = 10,4 + 0,8 = 11,2 \sim 11$ cm

b. Imbinarea nituită

Calculăm rezistenţele capabile ale unui nit la forfecare (R_f) şi la presiune pe gaură (R_s).

Nitul lucrează cu 2 secţiuni de forfecare.

$$R_f = 2 \times \frac{3,14 \times 1,7^2}{4} \times 1.120 \cong 5.100 \text{ kg}$$

$$R_s = 1,7 \times 1,2 \times 2.800 = 5.700 \text{ kg}$$

Vom lucra cu rezistenţa minimă de calcul.

R_{min} = 5,10 Tone

Numărul de nituri necesar:

- In talpă

$n = \frac{17500}{5100} = 3,41$; alegem : <u>n = 4 bucăţi</u>

In diagonala AD (2 60 x 60 x 6)

$n = \frac{11,55 \times 1400}{5.100} = 3,2$

Alegem n = 4 buc/şi

Pe diagonala 1-1 (2 L 50 x 50 x 7)

$$\frac{\Psi \times 10,85 \times 1.400}{5.100} \cong \frac{13.000}{5100} = 2,55$$

Alegem : n = 3 buc/şi

Distanţa dintre nituri se realizează conform cu tabelul de mai jos, iar dimensiunile guseului funcţie de aceste distanţe (figura de mai sus).

	DISTANŢE				
	e	e_1	e_2	e_3	e_4
Minim	3d	3d	2d	1,5d	între nituri în orice direcţie să există distanţa minimă sau maxima "e"
Maxim	6d	6d	4d	3d	

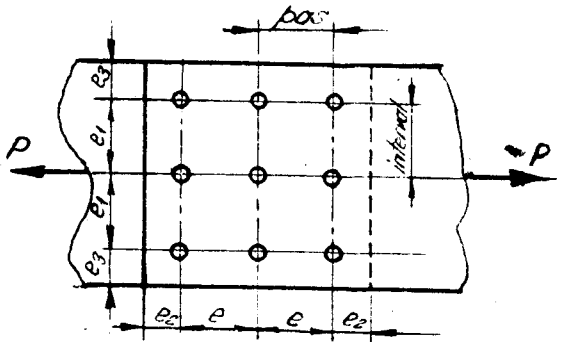


Fig. 79

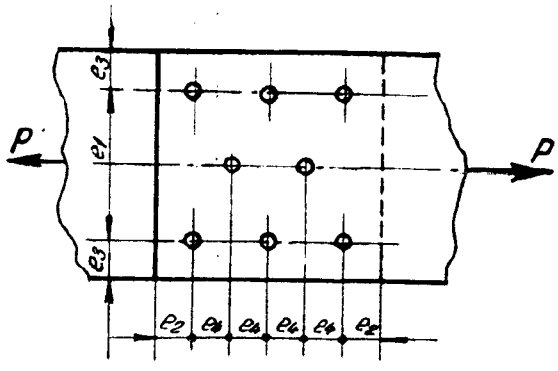


Fig. 80

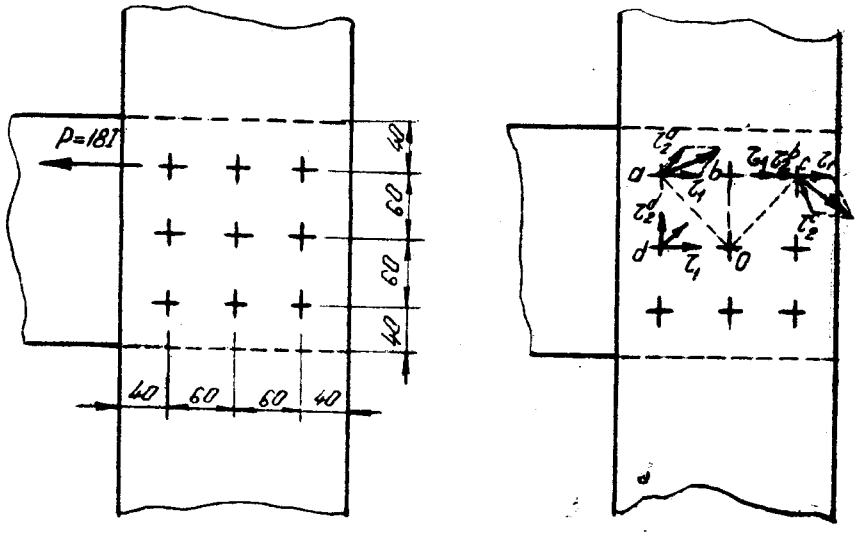


Fig. 81

2.10. Îmbinarea nituită din figura de mai jos este acționată de forța P. Diametrul niturilor $\emptyset$ = 20 mm.

Să se calculeze efortul, τ^{a}_{maxim} care ia naștere în nitul cel mai solicitat.

- Nituirea se opune mișcării plăcilor unite, mișcare compusă din :

1.- Translația în direcția lui P.

2.- Rotația în jurul centrului de rotire O.

- Reducem forța exterioară P la centrul de rotire. Obținem eforturile :

$T = P = 18$ T

$M = P.d = 18 \times 6 = 108$ T cm

1.- Forța T se împarte egal celor 9 nituri.

Astfel :

$$F_1 = \frac{T}{9} = \frac{18}{9} = 2 \text{ T}$$

- Efortul τ_1 (forfecare) se determină din nit, din aceeași forță :

$$\tau_1 = \frac{F_1}{A_{nit}} = \frac{2000}{3,14} = 638 \frac{kg}{cm^2}$$

unde :

$$A_{nit} = \frac{3,14 \times 2^2}{4} = 3,14 \text{ cm}^2$$

2.- Momentul M se împarte proporțional cu distanța nitului de centrul de rotire.

Distanța diferă de la nit la nit

$d_a = 8,5$ (d_c)

$d_b = 6$ cm (d_d)

$$\frac{\tau^a_2}{8,5} = \frac{\tau^b_2}{6} = (1)$$

Scriem momentul în punctul O:

$M = 4 (\tau^a_2 \times A \times 8,5 + \tau^b_2 \times A \times 6)$ (2)

unde :

$A = A_{nit} = 3,14$ cm^2

$M = 108.000$ kg-cm

Rezolvăm sistemul de 2 ecuații cu 2 necunoscute (τ^a_2, τ^b_2). Ca mărime, efortul de tip τ^a_2 (4 buc) este mai mare ca τ^b_2 (4 buc), dar efortul de tip τ^b_2 este colinear cu τ_1 (pentru nitul b), așa că le vom calcula pe amîndouă și alegem

situaţia cea mai defavorabilă.

$$4 \times 3{,}14\ \tau_2^a \times (8{,}5 + 6 \times 0{,}706) = 108.000 \qquad (2')$$

$$154 \times \tau_2^a = 108.000$$

Rezultă

$$\tau_2^a = 700\ \frac{kg}{cm^2}$$

şi

$$\tau_2^b = 0{,}706 \times \tau_2^a = 494\ \frac{kg}{cm^2}$$

Suprapunem eforturile τ_1 (din T)
şi τ_2 (din M).
a. în punctul a (fig.alăturată)

$$tg\,\alpha = \frac{6}{6} = 1.$$

$$\alpha = 45^0$$

$$\cos\alpha \cong 0{,}7$$

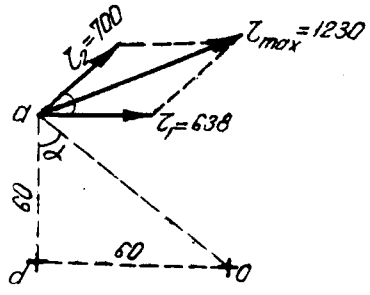


Fig. 82

$$\tau_{max} = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + 2\tau_1\tau_2\cos\alpha} =$$

$$= \sqrt{638^2 + 700^2 + 2 \times 638 \times 700 \times 0{,}7} \cong 1230\ \frac{kg}{cm^2}$$

b.- în punctul b (figura iniţială)

$\tau_{max} = \tau_1 + \tau_2^b$ (eforturile sînt colineare).

$$\tau_{max} = 638 + 494 = 1.132\ \frac{kg}{cm^2} \cong \tau_a\ (1.120)$$

Deci, nitul cel mai solicitat este nitul "a". In acest nit - efortul unitar admisibil la forfecare este depăşit în limitele admise.

2.11. Se dă stîlpul cu consola sa, nituită - încărcată la margine cu forţa P = 1.200 kg. Se cere să se afle distanţa maximă "a" unde se poate aşeza forţa "P" pe consolă.

Rezistenţele admisibile ale niturilor sînt :

- la forfecare : $\tau_{af} = 1.120\ kg/cm^2$
- la strivire : $\sigma_{as} = 2.800\ kg/cm^2$

Îmbinarea nituită este simetrică faţă de axele "YOZ"
Punctul O este centrul de greutate al nituirii.
Ea este supusă la un moment încovoietor ($M = Pa_1$) şi la o forţă tăietoare (P).

BIBLIOTECA
1
Institutului de Construcții

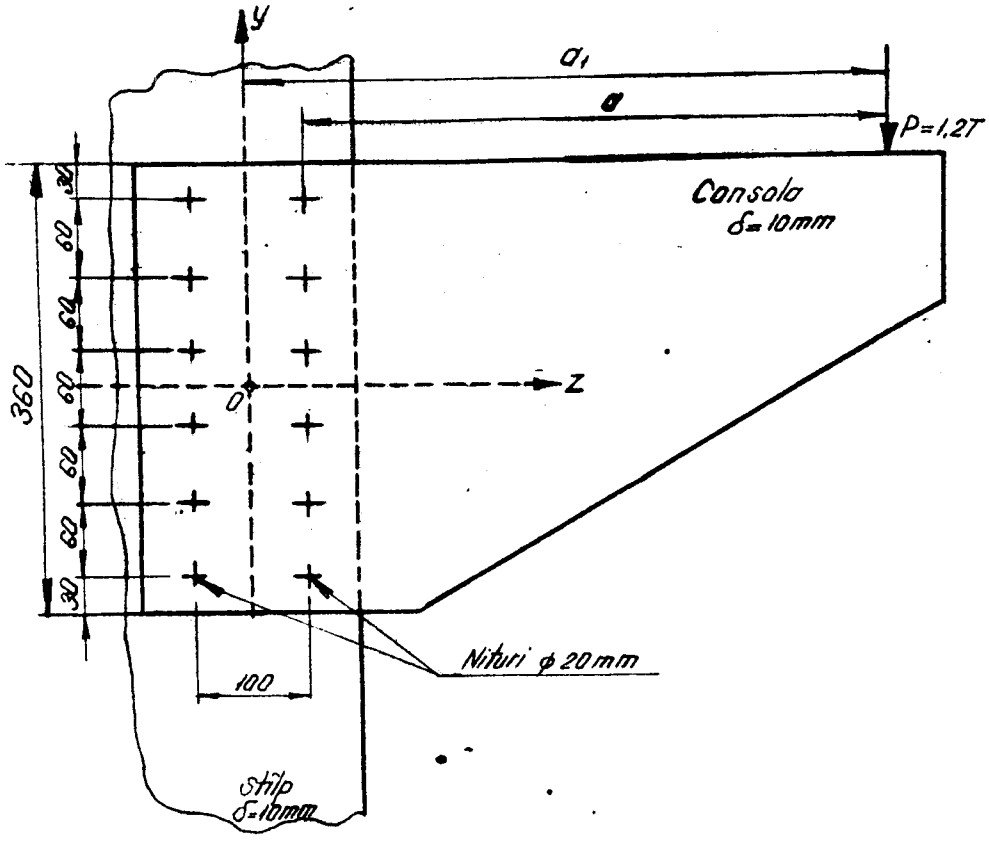


Fig. 23

Calculul nituirii se va face prin suprapunerea efectelor calculînd separat eforturile din moment şi din forţă. Sub acţiunea momentului încovoietor care acţionează îmbinarea nituită în cauză, niturile se încarcă inegal. Nituirea primeşte o rotaţie în jurul punctului O. Fiecare nit va suferi o deformaţie proporţională cu distanţa sa de la punctul O.

Nitul cel mai solicitat este nitul cel mai depărtat de punctul O. Pentru acest nit forţa orizontală "H", are expresia:

$$H = \frac{Y_{max}}{\sum_{i=1}^{3} Y_i^2} \cdot M \quad (kg)$$

unde:

$$Y_{max} = 15 \text{ cm}$$

$$\sum_{i=1}^{3} Y_i^2 = 2 \times (3^2 + 9^2 + 15^2) = 2 \times 315 = 630 \text{ cm}^2$$

$$M = Pxa_1 = 1.200 \cdot a_1 \cdot kg.cm$$

Deci, $H = \frac{1200 \times 15}{630} \cdot a_1 = 28,5 \cdot a_1 \cdot (kg)$.

Sub acţiunea forţei verticale (P), efortul se distribuie egal tuturor niturilor.

Deci,

$$V = \frac{P}{n} = \frac{1.200}{12} = 100 \text{ kg}$$

- Efortul rezultantm în nitul cel mai solicitat, va fi suma lor vectorială:

$$R = \sqrt{H^2 + V^2} = \sqrt{812{,}25\, a_1^2 + 10.000} \text{ (kg)}$$

-.Să aflăm rezistenţa capabilă minimă a unui nit

a. Rezistenţa la forfecare :

$$R_f = m \times \frac{\pi d^2}{4} \times \tau_{af} = 1 \times \frac{3{,}14 \times 2^2}{4} \times 1.120 = 3\,520 \text{ kg}$$

b. Rezistenţa la presiune pe gaură :

$$R_s = d \times \delta_{min} \times \sigma_{as} = 2 \times 1 \times 2.800 = 5.600 \text{ kg}$$

Unde :

$\delta_{min} = \delta$ - grosimea tolei stîlpului (sau consolei).

Deci,

$$R_{cap.min} = 3.520 \text{ kg}$$

- Efortul rezultant dat de forţele exterioare în nitul cel mai solicitat nu poate fi mai mare decît efortul capabil al unui nit. Adică,

$$R \leq R_{cap.nit}$$

Ridicăm la pătrat :

$$813\, a_1^2 + 10.000 \leq 12.390.000$$

$$a_1^2 \leq \frac{12.380.000}{813} \cong 15.200 \text{ cm}^2$$

Rezultă,

$$a_1 \leq 123 \text{ cm}$$

sau,

$$a \leq 1{,}18 \text{ m}$$

TABELA 2.1

Valorile rezistenţelor pentru buloane din OL 38 (STAS 763/49)

Felul buloanelor	Solicitarea	Rezistenţa admisibilă ($\frac{kg}{cm^2}$)		
		σ_a / σ_{at} τ_a / τ_{at}	Ipoteza de încărc	
			I	II
Buloane brute	Forfecare τ_a	0,7	980	1.120
	Presiune pe gaură σ_{ag}	1,1	1.600	1.800
	Intindere în tijă σ_{ai}	0,7	1,000	1.100

rp

Tabelul 2.1

Valorile rezistențelor admisibile pentru suduri (STAS 763/49)

Felul sudurii	Solicitarea	$\frac{\sigma_{as}}{\sigma_a}$	Rezistența admis. ($\frac{kg}{cm^2}$)	
			Ipoteza de încărcare I	Ipoteza de încărcare II
Suduri în adinsuri	Întindere	0,8	1.120	1.280
	Compresiune	1,0	1.400	1.600
	Încovoiere	0,85	1.190	1.360
	Forfecare	0,65	910	1.040
Suduri în relief	Orice solicitare	0,65	910	1.040

Tabelul 2.2

Rezistențe admisibile pentru niturii din OL 34 la construcții civile, industriale și la poduri (STAS 763/49)

Felul solicitării	Rezistențe admisibile $\frac{kg}{cm^2}$			Observații
	$\frac{\sigma_a}{\sigma_{at}}$ sau $\frac{\sigma_a}{\sigma_{ag}}$	la Ipoteze de încărcare I	II	
Forfecare σ_a	0,8	1.120	1.280	
Presiune pe gaură σ_{ag}	2	2.800	3.200	
Întindere în cîș σ_{ai}	0,3	420	480	

Tabelul 2.3

Diametrele niturilor în funcție de grosimea tablelor de strîns (STAS 763/49)

[illegible] nitului	10,5	14	17	20	23	[illegible]
Grosimea totală a tablelor de strîns pînă la 5	până la 5	5-9	7-11	10-14	[illegible]	[illegible]

Capitolul III

Diagrame de forţe axiale, forţe tăietoare şi momente încovoietoare

1.- Intr-o secţiune oarecare, în cazul cel mai complex, cînd se tratează problema în spaţiu, eforturile secţionale se pot reduce la şase şi anume trei forţe N_x, T_s, T_y - componente ale rezultantei R şi trei momente M_x, M_z şi M_y - componente ale momentului rezultant M.

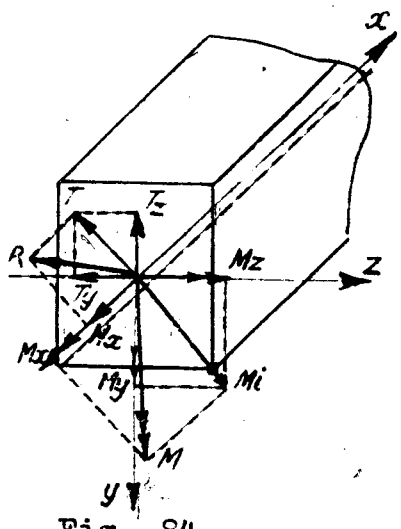


Fig. 84

N_x - forţa axială, componenta rezultantei R după axa ox (axa barei)

T - forţa tăietoare, componenţa rezultantei R din planul secţiunii oyz.

T_z - forţa tăietoare perpendiculară pe axa oz (proiecţia pe axa oy a forţei tăietoare T).

T_y - forţa tăietoare perpendiculară pe oy (proiecţie pe axa oz a forţei tăietoare).

M_x - momentul răsucitor, componenta momentului M pe axa barei Ox.

M_i - momentul încovoietor, proiecţia momentului M în planul secţiunii Oyz

M_z - momentul încovoietor în raport cu axa Oz (proiecţie momentului încovoietor M_1 după axa Oz).

M_y - momentul încovoietor în raport cu axa oy. (proiecţia momentului încovoietor după axa oy).

2.- Tratînd problema, în plan, cînd planul de încărcare coincide cu o direcţie principală centrală de inerţie, eforturile secţionale se reduc la trei şi anume :

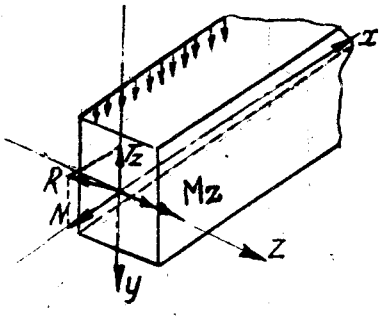


Fig. 85

N - forţa axială

$T = T_z$ forţa tăietoare normală pe axa oz.

$M = M_z$ moment încovoietor după axa oz

Forţa axială N, într-o secţiune anumită, reprezintă suma proiecţiilor pe axa barei a forţelor din stînga secţiunii cu semnul lor, sau a celor din dreapta secţiunii cu semn schimbat.

Forţa tăietoare T, într-o secţiune oarecare este suma proiecţiilor pe direcţia normală pe axa barei a forţelor din stînga secţiunii cu semnul lor, sau a celor din dreapta secţiunii cu semn schimbat.

Momentul încovoietor M din secţiune, reprezintă suma momentelor în raport cu secţiunea respectivă a forţelor din stînga secţiunii cu semnul lor sau a celor din dreapta ei cu semn schimbat.

Se acceptă prin convenţie ca sensuri pozitive pentru eforturile secţionale N, T şi M, cele din figură (fig. 86).

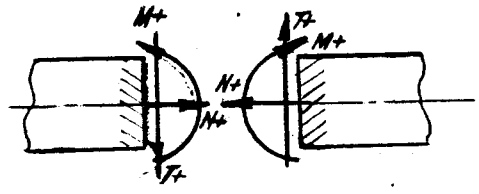


Fig. 86

Diagramele N şi T se reprezintă avînd valorile pozitive deasupra liniei de referinţă iar pentru M valorile pozitive se pun sub linia de reper.

In cazul grinzilor cotite mai complicate, a cadrelor, se adoptă un sens de parcurgere pentru a se stabili care este partea stîngă sau dreaptă a secţiunii, respectiv sensul axei de referinţă.

3.- Relaţiile diferenţiale ale încovoierii în cazul unei grinzi drepte sînt următoarele :

$$q = -\frac{dT}{dx}$$

$$T = \frac{dM}{dx}$$

unde :

q - este sarcina distribuită

M - este momentul încovoietor

Vor putea apare următoarele cazuri curente :

Cînd : q = 0 T = constant M = linear

q = constant T = linear M = parabolă de gradul II

q = linear T = parabolă de gradul II M = parabolă de gradul III

De remarcat că :

- In dreptul unei sarcini uniform distribuite q, forţa tăietoare are variaţie lineară, iar momentul încovoietor este parabolic cu convexitatea în sensul sarcinii q.

- In dreptul unei sarcini concentrate forţa tăietoare are un salt egal cu intensitatea forţei exterioare iar în diagrama de momente încovoietoare se produce o frîngere.

- In dreptul unui cuplu, forţa tăietoare nu se modifică, iar momentul încovoietor are un salt egal cu valoarea momentului exterior.

4. Pentru sarcini verticale diagramele T şi M se pot construi şi grafic (vezi problemele 3.22 şi 3.23) şi anume :

Se construieşte poligonul forţelor, apoi alegîndu-se un pol şi ducînd razele polare se trasează poligonul funicular.

Determinîndu-se linia de închidere a poligonului funicular - diagrama cuprinsă între laturile poligonului funicular şi această linie reprezintă chiar diagrama de momente încovoietoare.

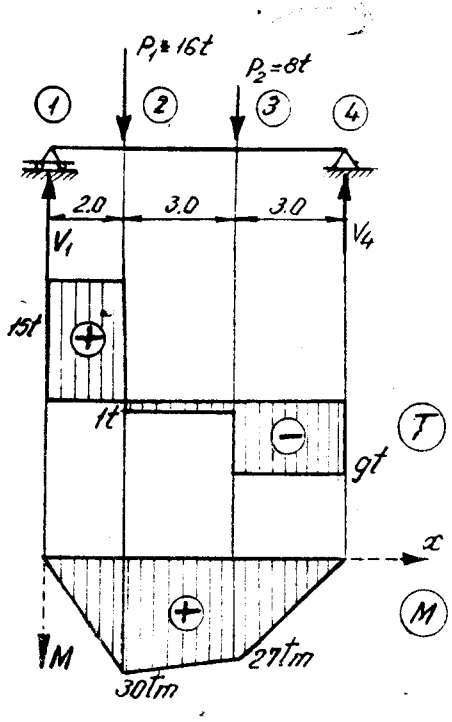


Fig. 87

Ducîndu-se apoi o paralelă la linia de închidere a poligonului funicular în poligonul de forţe se pot stabili reacţiunile deci se poate trasa şi diagrama de forţe tăietoare.

Se va ţine seama de scările la care s-a făcut epura şi anume :

Dacă desenul s-a executat avînd ca scară a lungimilor :

1 cm în desen = a cm

iar forţele au fost reprezentate avînd ca scară a forţelor :

1 cm în desen = b kg

rezultă scara momentelor :

1 cm în desen = a b H kg cm

unde H este distanţa polară în centimetri efectivi de epură.

3.1. Să se traseze diagramele N, T, M, pentru grinda simplu rezemată din figura de mai sus.

Grinda este static determinată, se vor scrie două ecuaţii de echilibru şi avînd două necunoscute V_1 şi V_4.

Cele două reacţiuni verticale se vor determina din ecuaţiile de momente statice, verificarea făcîndu-se cu ajutorul ecuaţiei de proiecţie pe verticală.

$$M_4 = 0 = V_1 \times 8{,}00 - 16 \times 6 - 8 \times 3$$

De unde

$$V_1 = \frac{16 \times 6 + 8 \times 3}{8{,}00} = 15\,T$$

$$M_1 = 0 = 16 \times 2 + 8 \times 5 - V_4 \times 8$$

$$V_4 = \frac{16 \times 2 + 8 \times 5}{8} = 9T$$

Verificarea : 9 + 15 = 16 + 8

Deci valorile au fost determinate corect - sensul + indică că sensul reacţiunilor e cel iniţial de noi.

Pentru trasarea diagramei de forţă tăietoare T vom scrie expresiile ei pe diverse tronsoane:

Zona 1 - 2

$T_{x_{1-2}}$ = + 15 T - are o valoare constantă, confirmînd prima relaţie diferenţială a încovoierii;

$q = -\frac{dT}{dx}$ (la noi q = 0 deci T = ct

q este chiar tg la curba T)

Zona 2 - 3

$T_{x_{2-3}}$ = 15 - 16 = - 1 T - are o valoare constantă apare un salt egal cu 16 T din dreptul secţiunii 2.

Zona 3 - 4

Lunînd proiecţiile pe verticală a forţelor din dreapta cu semn schimbat obţinem :

$T_{x_{3-4}}$ = - 9 T

Curba momentelor încovoietoare se deduce în acelaş fel pe zone

Zona 1 - 2

$M_{x_{1-2}}$ = 15 x - variază linear confirmînd cea de a doua relaţie a încovoierii $T = \frac{dM}{dx}$ (dacă T = ct M = linear)

T indică chiar tangenta la diagrama de momente încovoietoare, de aceea întrucît forţa tăietoare e pozitivă tangenta la curba de moment încovoietor este şi ea pozitivă.

M_2 = 15 x 2 = 30 Tm.

Intrucît şi pe zonele 2-3 şi 3-4 forţa tăietoare este constantă momentul încovoietor va varia linear. Forţa tăietoare în aceste zone are valori negative - deci şi tangenta la curba de momente îşi schimbă înclinarea devenind negativă şi anume pe zona 2-3 are o valcare mai mică deci înclinarea tangentei faţă de orizontală este mai mică iar pe zona 3-4 mai pronunţată.

M_3 = - (- 9 x 3) = 27 Tm. (s-a considerat momentul forţelor din dreapta secţiunii cu semn schimbat).

Se vede că momentul încovoietor este maxim acolo unde forţa tăietoare este nulă sau îşi schimbă semnul.

In punctele 1 şi 4 momentul încovoietor este egal cu zero.

3.2 Să se construiască diagramele N,T,M pentru grinda din figură.

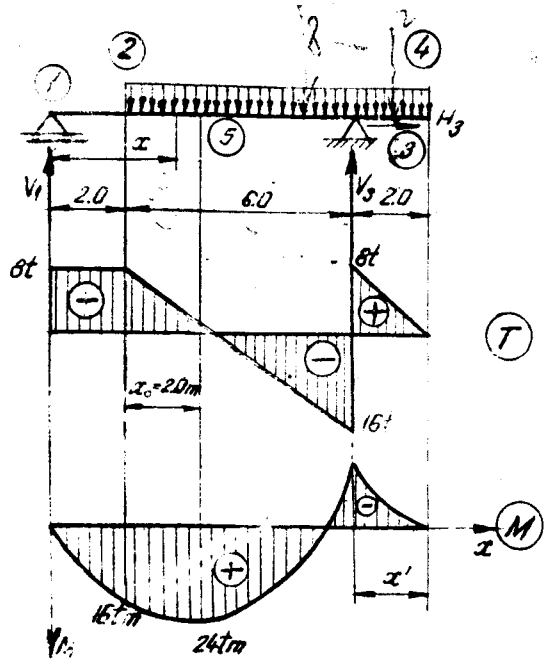


Fig. 88

Cele două reacţiuni verticale se determină din ecuaţiile de momente statice scrise în punctele 1 şi 3, verificarea făcîndu-se prin scrierea ecuaţiei de proiecţie pe verticală (reacţiunea orizontală H_3, este nulă întrucît nu există nici o componentă orizontală a sarcinilor exterioare).

$M_3 = 0 = V_1 \times 8{,}00 - 4 \times 8{,}00 \times 2{,}00$

$$V_1 = \frac{4 \times 8{,}00 \times 2{,}00}{8{,}00} = 8\ T$$

$M_1 = 0 = 4 \times 8{,}0 \times 6{,}0 - V_3 \times 8$

$$V_3 = \frac{4 \times 8{,}0 \times 6{,}0}{8{,}0} = 24\ T$$

Verificare :

$8 + 24 = 4 \times 8$

In zona 1-2 forţa tăietoare este constantă ($q = 0$)

$T_x = + 8$ T.

In zona 2-3 expresia forţei tăietoare este următoarea : $T = 8 - 4x$ are deci variaţie liniară, lucru confirmat şi de relaţia II a încovoierii $q = \frac{-dT}{dx}$ (cînd q = constant T linear).

Ne interesează şi secţiunea unde forţa tăietoare se anulează căci acolo va fi momentul încovoietor maxim.

$T_x = 0 = 8 - 4x_o$

$x_o = 2{,}00$ m

In stînga secţiunii 3 valoarea forţei tăietoare este

$T_{3\,st} = 8 - 4 \times 6 = -16$T

In secţiunea din dreapta reazemului 3 forţa tăietoare are un salt egal cu valoarea reacţiunii :

$T_{3dr} = T_{3st} + V_3 = -16 + 24 = +8$ T

Intre punctele 3 şi 4 forţa tăietoare variază linear ($q = 0$) şi devine nulă în secţiunea 4 (diagrama forţei

tăietoare între punctele 3-4 are aceiaşi înclinare (coeficient unghiular) cu aceea dintre secţiunile 2 şi 3, deoarece valoarea sarcinii uniform distribuite q este aceiaşi : $q = \frac{-dT}{dx}$

Momentul încovoietor are o variaţie care se poate deduce din diagrama forţelor tăietoare.

Pe porţiunea 1-2, întrucît forţa tăietoare este pozitivă şi constantă, se poate deduce din relaţia $T = \frac{dM}{dx}$, că momentul încovoietor pe această porţiune va fi o dreaptă cu tangenta pozitivă (direcţia stînga sus-dreapta jos). Valoarea momentului încovoietor în punctul 2 este $M_2 = + 8 \times 2 = 16$ Tm .

Pe porţiunea 2 - 5 - 3, forţa tăietoare are variaţie liniară. De la 2 - 5, forţa tăietoare este pozitivă şi scade pînă ajunge în punctul 5 unde se anulează; apoi pe zona 5-3 tangenta (forţa tăietoare), devine negativă şi creşte în valoare absolută.

Deci momentul încovoietor variază parabolic de la 2 la 3 şi anume de la 2 la 5 tangenta este pozitivă cu valori din ce în ce mai mici, în 5 este orizontală (tangenta nulă) ca apoi de la 5 la 3 tangenta să schimbe sensul (înclinarea) şi să capete valori din ce în ce mai mari (vezi diagrama) momentelor încovoietoare.

Dacă scriem expresia momentului încovoietor în zona 2 - 5 - 3 aceasta ne vă arăta că într-adevăr variaţia momentului încovoietor este parabolică - derivînd de două ori obţinem curbura ei.

$$M_x = + 8 \times x - \frac{4x^2}{2}$$

Se vede că în punctul 2 parabola (din dreapta) se raccordeaza cu dreapta (din stînga) - tangentele (forţa tăietoare) amîndorora fiind egale în acest punct.

Valoarea momentului maxim din punctul 5 este :

$$M_5 = + 8 \times 4 - \frac{4.2^2}{2} = 24 \text{ Tm}$$

Intre punctele 3-4 forţa tăietoare este pozitivă, liniară şi scade spre punctul 4, deci momentul încovoietor este parabolic, cu tangenta pozitivă care scade pe măsură ce se apropie de punctul 4, unde e nulă.

Expresia momentului încovoietor în secţiunea x (luînd momentul forţelor din dreapta secţiunii cu semn schimbat) este

$M_x = \frac{4,5x^2}{2}$ - ... variaţie parabolică iar valoarea lui în punctul 3 este $M_3 = -\frac{4 \times 2^2}{2} = -8$ Tm

(3.3.) Să se determine diagramele N, T, M, pentru grinda din figura. Ce transformare a diagramelor aduce schimbarea reazemelor între ele - şi anume când în 1 este articulaţie iar în 4 reazem simplu.

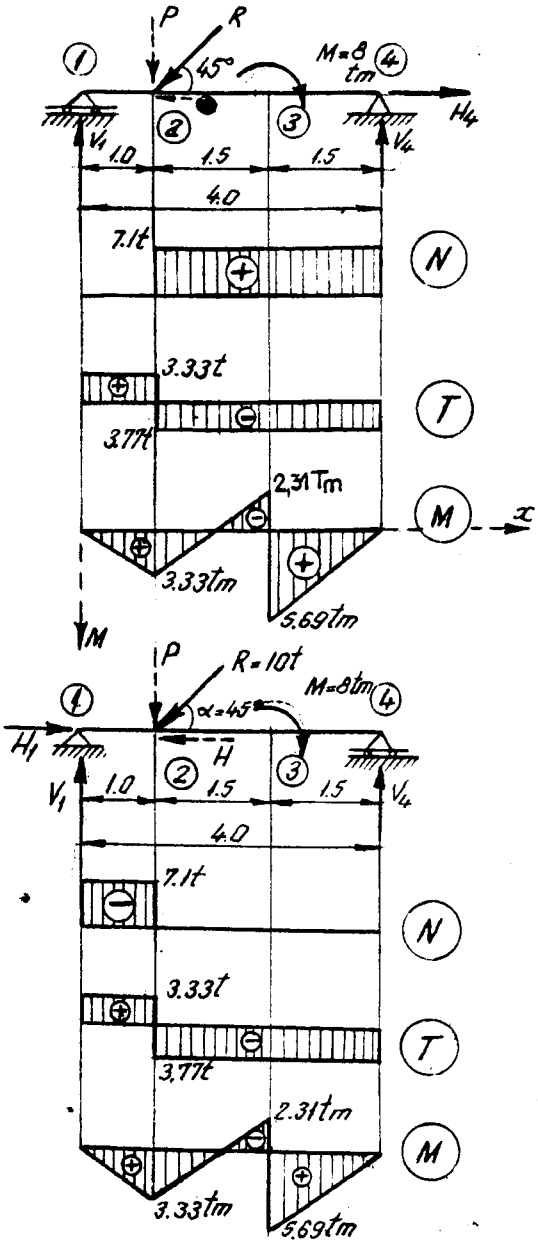


Fig. 89

În cazul când avem ca încărcări şi forţe înclinate în primul rînd trebuie să determinăm proiecţiile lor orizontale şi verticale - respectiv cu proiecţiile lor pe axa barei şi normal pe ea.

În cazul nostru forţa R va fi descompusă în componentele ei P şi H.

$P=H=R \cos 45^0 = 10 \times 0,71 = 7,1$ T

Reacţiunile vor fi :

V_1 în reazemul simplu 1 şi

V_4 şi H_4 în articulaţia 4.

Determinarea reacţiunilor :

Împingerea H_4 se determină din ecuaţia de proiecţii pe orizontală iar reacţiunile verticale V_1 şi V_4 din ecuaţii de momente statice verificate cu ajutorul ecuaţiei de proiecţii pe verticală.

$H_4 = H = 7,1$ T

$M_4 = 0 = V_1 x 4 - 3 \times 7,1 + 8$

$V_1 = \frac{3x7,1-8}{4} = \frac{21,3-8}{4} = 3,33$ T

$M_1 = 0 = 7,1 \times 1 + 8 - V_4 \times 4$

$V_4 = \frac{7,1 \times 1 + 8}{4} = 3,77$ T

Verificare : $V_1 + V_4 = P$

$3,33 + 3,77 = 7,1$ T

Diagrama forţei tăietoare se determină pe porţiuni şi anume :

Pe zona 1–2 $q = 0$ deci $T = ct$ ($q = -\frac{dT}{dx}$), valoarea forţei tăietoare este $T_{x\ 1-2} = + 3,33$ T

In dreptul punctului 2, în diagrama de forţă tăietoare apare un salt egal cu P = 7,1 T ca apoi să varieze din nou constant pe porţiunea 2–3–4

$T_{x\ 2-3-4} = + 3,33 - 7,1 = - 3,77$ T

Diagrama momentelor încovoietoare se poate deduce din diagrama forţelor tăietoare, cunoscînd că ordonata forţei tăietoare într-un punct reprezintă tangenta la curba de momente încovoietoare în punctul dat - ceea ce rezultă din relaţia $\frac{dM}{dx} = T$

Astfel pe porţiunea 1–2 dat fiind că forţa tăietoare este pozitivă şi constantă, curba de momente încovoietoare va fi lineară şi tangenta pozitivă (adică înclinarea ei este de la stînga sus spre dreapta jos).

Expresia momentului încovoietor pe aceasta zonă este liniară.

$M_{x\ 1-2} = + 3,33\ x$ iar valoarea în punctul 2 este

$M_2 = 3,33$ Tm

Pe zona 2–3–4 variaţia momentului încovoietor este liniară şi cu tangenta negativă (direcţia stînga jos–dreapta sus) deoarece forţa tăietoare este constantă şi negativă.

Ceea ce nu poate rezulta din diagrama forţei tăietoare, este că în dreptul punctului 3 curba momentului încovoietor, are un salt egal cu valoarea momentului exterior M = + 8 Tm; momentul încovoietor în punctul 3 va avea două valori distincte una în stînga punctului 3 şi alta în dreapta lui.

$M_{3s} = + 3,33x2,5-7,1x1,5 = 8,34-10,65 = - 2,31$ Tm

$M_{3d} = M_{3s} + M = - 2,31 + 8 = + 5,69$ Tm

Ca forţe axiale în prima variantă apare întindere de la 2–4 în prima variantă şi compresiune între 1–2 în cea de a doua variantă.

In cazul schimbării reazemelor se poate remarca că diagrama forţei tăietoare şi a momentului încovoietor rămîn neschimbate

Ca o observaţie se vede că momentul încovoietor maxim poate apare în secţiunea 2 sau 3 - unde forţa tăietoare îşi schimbă semnul, sau unde se aplică un moment exterior.

5.4. Să se calculeze diagramele N, T, M, pentru grinda din figură.

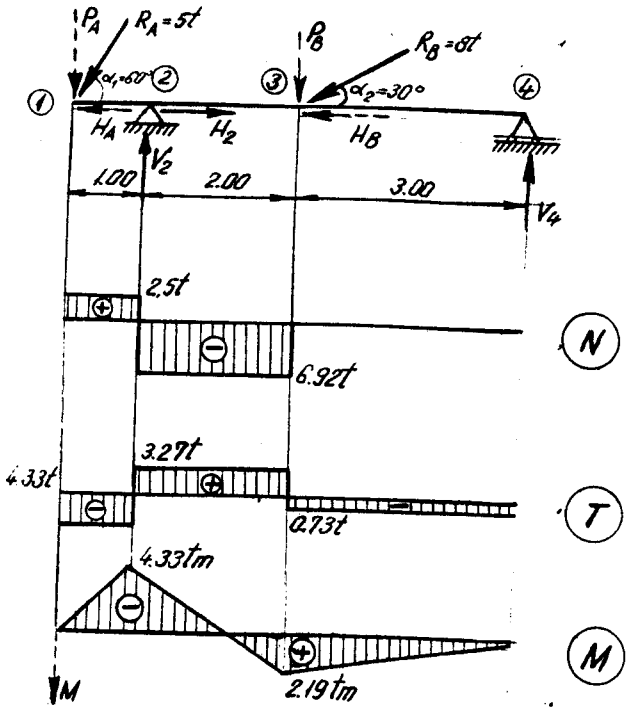


Fig. 90

Se vor determina proiecţiile forţelor exterioare pe direcţia barei de normal pe ea ;

$H_A = R_A \cos 60^\circ = 5 \times 0{,}5 = 2{,}5$ T

$P_A = R_A \sin 60^\circ = 5 \times 0{,}866 = 4{,}33$ T

$H_B = R_B \cos 30^\circ = 8 \times 0{,}866 = 6{,}92$ T

$P_B = R_B \sin 30^\circ = 8 \times 0{,}5 = 4{,}00$ T

Din ecuaţia de proiecţii pe orizontală rezultă că reacţiunea orizontală (împingerea)

$H_2 = 2{,}5 + 6{,}92 = 9{,}42$ T

Putem determina forţele axiale din grindă făcînd suma proiectărilor forţelor pe axa barei din stînga secţiunii. În cazul nostru pe porţiune 1-2: $N_{1-2} = + 2{,}5$ T (întinde bara, tirage de secţiune) iar pe zona 2-3 avem $N_{2-3} = - 6{,}92$ T saltul făcîndu-se în dreptul secţiunii 2 cu valoarea împingerii $H_2 = 9{,}42$ T.

Se vor stabili funcţiunile verticale V_2 şi V_4 din ecuaţiile de momente statice în raport cu punctele 2 şi 4 iar verificarea se va face cu ajutorul ecuaţiei de echilibru de proiecţie pe verticală.

$$M_4 = 0 = V_2 \times 5 - 4{,}33 \times 6 - 4 \times 3$$

$$V_2 = \frac{4{,}33 \times 6 + 4 \times 3}{5} = 7{,}6 \text{ T}$$

$$M_2 = 0 = -V_4 \times 5 - 4{,}33 \times 1 - 4 \times 2$$

$$V_4 = \frac{-4{,}33 \times 1 + 4 \times 2}{5} = 0{,}73 \text{ T}$$

$$0{,}73 + 7{,}6 = 4{,}33 + 4{,}00$$

Forţa tăietoare pe toată bara are o variaţie constantă ( ) avînd salturi în dreptul sarcinilor concentrate. Pentru determinarea diagramei de momente încovoietoare (trasă pe porţiuni) ne vom baza pe relaţia $T = \frac{dM}{dx}$

adică forţa tăietoare într-o secţiune reprezintă tangenta la diagrama de încovoietoare din secţiunea respectivă.

Pe porţiunea 1-2 forţa tăietoare este constantă şi negativă - diagrama momentului încovoietor va varia linear şi va avea tangenta negativă (sensul axelor e cel indicat pe figură). In punctul 2: $M_2 = - 4,33 \times 1 = - 4,33$ Tm.

Pe porţiunea 2-3 forţa tăietoare este pozitivă şi constantă, deci diagrama de moment încovoietor, pornind de la valoarea $M_2 = - 4,33$ Tm, va avea variaţie lineară pe tangentă pozitivă (direcţia stînga sus, dreapta jos) ajungînd în secţiunea 3 la valoarea : $M_3 = - 4,33 \times 3 + 7,6 \times 2 = 2,19$ Tm. Deasemeni putem calcula valoarea momentului încovoietor în secţiunea 3 luînd suma momentelor forţelor din dreapta secţiunii cu sens schimbat - trebuie să dăm peste acelaş rezultat.

$M_3 = - (-0,73 \times 3) = + 2,19$ Tm

Între secţiunile 3 şi 4 forţa tăietoare este constantă şi negativă deci momentul încovoietor linear cu tangentă negativă, pornind din punctul 3 cu valoarea + 2,19 Tm şi ajungînd în punctul 4 la valoarea nulă.

Se ppate vedea că valorile caracteristice, maxime, ale momentului încovoietor sînt tocmai în punctele 2 şi 3, acolo unde forţa tăietoare îşi schimbă semnul.

3.5. Se dă grinda din figură. Să se traseze diagramele N, T. M.

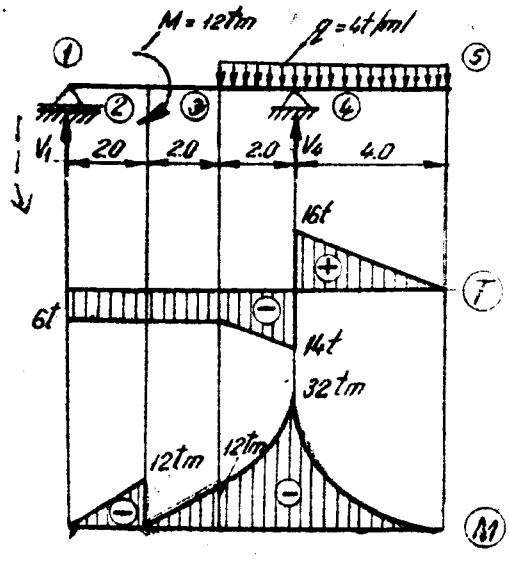


Fig. 91

Se poate vedea că pe această grindă apar ca reacţiuni numai cele verticale V_1 şi V_4 iar reacţiunea orizontală H_4 (care ar trebui să ia naştere în pct. 4) este nulă, întrucît ca încărcari acţionează numai forţe verticale-deci şi reazemul 4 lucrează ca un reazem simplu, nu ca o articulaţie.

Ne propunem iniţial ca sensul reacţiunilor este de jos în sus.

Pentru calculul valorii reacţiunilor verticale scriem ecuaţiile de momente statice, verificarea făcîndu-se cu ecuaţia de proiecţii pe verticală.

$M_4 = 0 = V_1 \times 6 + 12 + 4 \times 6 \times 1 = 0$

$$V_4 = \frac{12 + 4 \times 6 \times 7}{6} = 30 \text{ T}$$

Verificarea prin proiecţia pe verticală :

$- 6 + 30 = 4 \times 6$

Cunoscînd valoarea şi sensul reacţiunilor, trasarea diagra,ei de forţă tăietoare este simplă şi anume :

Pe porţiunea 1-2, forţa tăietoare este constantă (q=o) şi egală cu reacţiunea $V_1 = - 6$ T, variaţie care continua în mod identic şi de la 2-3, unde momentul exterior nu aduce nici o modificare a forţei tăietoare.

Pe zona 3-4, deoarce q este constant şi îndreptat în jos, forţa taietoare va fi liniară, şi va scade ca valoare ajungînd la stînga reazemului 4 la valoarea :

$$T_{4\ s} = - 6 - 2 \times 4 = - 14 \text{ T}$$

Pe zona 4-5, după ce forţa taietoare face un salt de 30 T ajungînd la dreapta reazemului 4 la valoarea de :

$$T_4 = - 14 + 30 = 16 \text{ T}$$

Apoi forţa taietoare variază liniar şi scade ajungînd în punctul 5 la zero. Intra-adevăr :

$$T_5 = + 16 - 4 \times 4 = 0$$

Ca o observaţie cele două drepte ale diagramei de forţă taietoare dintre 3-4 şi 4-5 sînt paralele deoarece coeficienţii lor unghiular este acelaş - q.

Momentul încovoietor pe zona 1-2-3 este liniar - forţa tăietoare fiind constantă - şi cu tangenta negativă (tangenta stîngă jos - dreapta sus) suferind însă un salt în dreptul punctului 2.

Iată valorile momentului încovoietor în secţiunile caracteristice :

$$M_{2\ s} = - 6 \times 2 = - 12 \text{ tm}$$

$$M_{2\ d} = - 6 \times 2 + 12 = 0$$

$$M_3 = - 6 \times 4 + 12 = - 12 \text{ tm}$$

Pe porţiunea 3-4, forţa tăietoare este liniară, negativă şi creşte în valoare absolută ceea ce face ca variaţia momentului încovoietor să fie parabolică, avînd tangenta negativă din ce în ce mai mare (concavitatea în sus).

Intre secţiunile 4-5, forţa tăietoare este liniară, pozitivă şi scade - momentul încovoietor va fi parabolic, cu tangentă pozitivă (stînga sus-dreapta jos), ajungînd la zero în

în punctul 5.

Momentul încovoietor în punctul 4 se calculează mai ușor, luîndu-se suma momentelor forțelor din dreapta secțiunii cu semn schimbat.

$$M_4 = -\frac{4 \times 4^2}{2} - \ldots 32 \text{ Tm}$$

Se vede că momentul încovoietor maxim este în secțiunea 4, unde forța tăietoare trece de la semnul pozitiv la negativ, sau ar putea fi și în secțiunea 2, unde se aplică momentul exterior M = 12 Tm.

Se poate urmări că în punctul 3 drepta 2-3 și parabola 3-4 a curbei momentelor încovoietoare se racordează - avînd aceiași tangentă, conform diagramei de forță tăietoare.

3.6. Se dă grinda încastrată din figură. Să se traseze diagramele N, T, M.

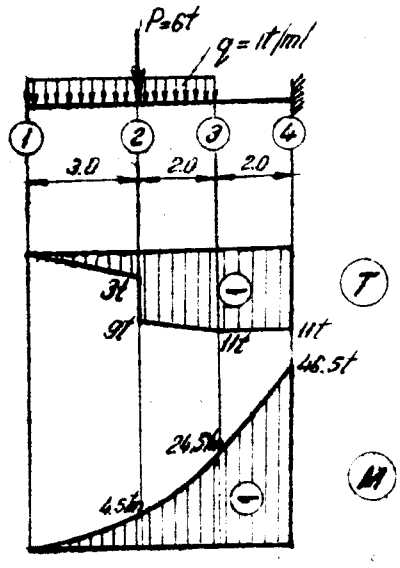


Fig. 9.1

La grinda încastrată se pornește calculul întotdeauna de la capătul liber, iar reacțiunile V, H și M din încastrare reies de la sine în clipa în care ajungem la determinarea forței axiale, tăietoare și momentului încovoietor în secțiunea din dreptul încastrării.

În cazul grinzii de față, forța axială lipsește, toate forțele se aplică normal pe axa barei.

Trasarea diagramei de forță tăietoare, se va face pe porțiuni, și anume pornind de la capătul liber.

Pe porțiunea 1-2, forța tăietoare variază linear, avînd o tangentă pozitivă întrucît sarcina q este constantă și îndreptată în jos. Pe porțiunea 2-3 forța tăietoare variază de asemenea linear avînd aceiași înclinare ca și în zoa 1-2 (q are aceiași valoare); în dreptul secțiunii 2 suferă un salt egal cu valoarea forței concentrate P = 6 t. Pe ultima porțiune 3-4, forța tăietoare variază constant, deoarece de la 3 pînă la 4 nu mai există nici o sarcină care ar putea modifica forță tăietoare.

În ceea ce privește curba momentelor, alura acesteia se poate deduce privind diagrama tăietoare și anume :

De la 1 la 2 forța tăietoare este lineară, negativă și

creşte pornind de la zero, ceea ce face ca momentul încovoietor pe această zonă să varieze parabolic, cu tangentă negativă (stînga jos, dreapta sus) avînd concavitatea în sus (tangentele cresc în valoare absolută).

De la 2 la 3 forţa tăietoare este de asemenea liniară negativă şi creşte în valoare absolută, ceea ce determină ca variaţia curbei momentului încovoietor să fie în acest domeniu parabolică cu tangenta negativă care creşte în valoare absolută de la 2 la 3.

In punctul 2 cele două parabole nu se racordează, nu au tangentele comune, întrucît în dreptul acestui punct forţa tăietoare are două valori distincte - (în stînga 3 T iar în dreapta 9,0 T).

In zona 3-4, momentul încovoietor are variaţie liniară, şi tangenta negativă, întru cît forţa tăietoare o constantă şi negativă.

In punctul 3 parabola 2-3 se racordează cu dreapta 3-4, avînd în acest punct aceiaşi valoare a tangentei.

Iată valorile momentului încovoietor în punctele caracteristice :

$$M_2 = -1 \cdot \frac{2^2}{2} = -4{,}5 \text{ Tm}$$

$$M_3 = -\frac{1 \times 5^2}{2} - 6 \times 2 = -12{,}5 - 12 = -24{,}5 \text{ Tm}$$

$$M_4 = -1 \times 5 \times 4{,}5 - 6 \times 4 = -22{,}5 - 24 = -46{,}5 \text{ Tm}$$

3.7. Să se traseze diagramele N,T,M avînd grinda încastrată din figură.

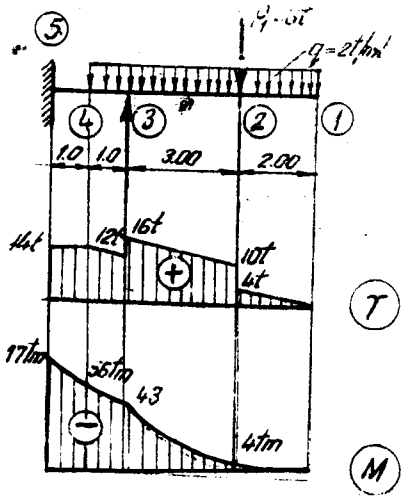


Fig. 93

Forţa axială lipseşte, sarcinile fiind verticale, normale pe axa barei.

Forţa tăietoare este constantă pe porţiunea 5-4, pe porţiunile 4-3, 3-2 şi 2-1 are o variaţie liniară, avînd salturi în dreptul sarcinilor concentrate.

Momentul încovoietor are o variaţie liniară pe porţiunea 5-4 şi pe restul porţiunilor este parabolic. Ca o remarcă la construcţia diagramelor de momente încovoietoare se va avea în vedere faptul că în punctul 2 şi 3 nu se face racordarea arcelor de parabolă din stînga şi dreapta lor, tangentele

fiind diferite, în punctul 3 tangenta din stînga e mai mică de cît cea din dreapta astfel că va apare un eşind; în punctul 2 avem un intrînd, căci tangenta din stînga e mai mare decît cea din dreapta.

Iată şi valorile caracteristice ale momentului încovoietor :

$M_2 = - 2 \times 2 \times 1 = - 4$ Tm

$M_3 = - 2 \times 5 \times 2{,}5 - 6 \times 3 = - 43$ T,

$M_4 = - 2 \times 6 \times 3 - 6 \times 4 + 4 \times 1 = - 56$ Tm

$M_5 = - 2 \times 6 \times 4{,}0 - 6 \times 5 + 4 \times 2 = - 70$ Tm

In general, momentul încovoietor în secţiunea n + 1 se calculează astfel :

$$M_{n+1} = M_n + T_n \times d_{n-n+1} + \mathcal{M}_{n-n+1}$$

unde :

M_n - momentul încovoietor în secţiunea n

M_{n+1} - momentul încovoietor în secţiunea n+1

T_n - forţa tăietoare în secţiunea n

d_{n-n+1} - distanţa dintre secţiunile n şi n+1

$\mathcal{M}_{n-n+1}$ - momentul forţei exterioare existente între secţiunea n şi n+1

Aplicînd regula aceasta în cazul nostru căpătăm :

$M_2 = - 4$ Tm

$M_3 = - 4 - 10 \times 3 - 2 \times 3 \times 1{,}5 = - 43$ Tm

$M_4 = - 43 - 12 \times 1 - 2 \times 1 \times 0{,}5 = - 56$ Tm

$M_5 = - 56 - 14 \times 1 = - 70$ Tm

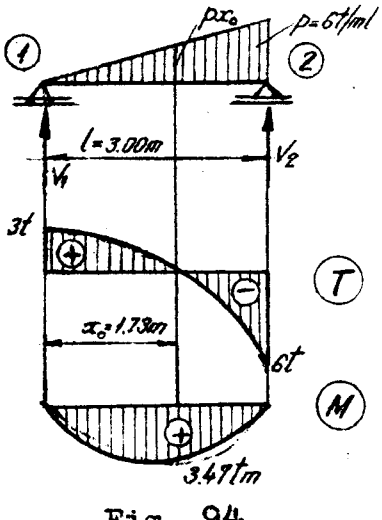


Fig. 94

3.8. Să se traseze diagramele T şi M pentru grinda din figură.

Vom determina reacţiunile V_1 şi V_2.

$$M_2 = 0 = V_1 \times 3 - \frac{6 \times 3}{2} \times 1 = 0$$

(T) $$V_1 = \frac{\frac{6 \times 3}{2}}{3} = 3 \text{ T}$$

$$M_1 = + \frac{6 \times 3}{2} \cdot 2 - V_2 \cdot 3 = 0$$

(M) $$V_2 = \frac{\frac{6 \times 3}{2} \cdot 2}{3} = 6 \text{ T}$$

Verificare :

$$3 + 3 = \frac{3 \times 6}{2}$$

Trasarea forţei tăietoare T se face aplicînd relaţia diferenţială a încovoierii $\frac{dT}{dx} = -q$ (sarcina distribuită q reprezintă tangenta la forţa tăietoare).

In cazul nostru q fiind linear, T va varia parabolic cu tangenta din ce în ce mai mare. Ne va interesa secţiunea unde se anulează forţa tăietoare :

$$T_{xo} = -\frac{px_o \cdot x_o}{2} = 0 \text{ dar } \frac{p\,x_o}{x_o} = \frac{p}{l} = \frac{6}{3} = 2$$

$$px_o = 2\,x_o$$

deci putem scrie ca :

$$3 - \frac{2\,x_o \cdot x_o}{2} = 0 \quad \text{de unde } x_o = \sqrt{3} = 1{,}73 \text{ m}$$

Intrucît forţa tăietoare are variaţia unei parabole de gradul doi - relaţia $\frac{dM}{dx} = T$ ne arată că curba momentului încovoietor va fi de forma unei parabole de gradul 3.

Momentul maxim va fi :

$$M_{xo} = V_1 \times x_o = \frac{p_{xo} \cdot x_o}{2} \cdot \frac{x_o}{3} = 3 \times 1{,}73 - \frac{3{,}46 \times 1{,}73}{2} \cdot \frac{1{,}73}{3} = 3{,}47 \text{ tm}$$

3.3. Să se traseze diagramele T,M pentru grinda alăturată.

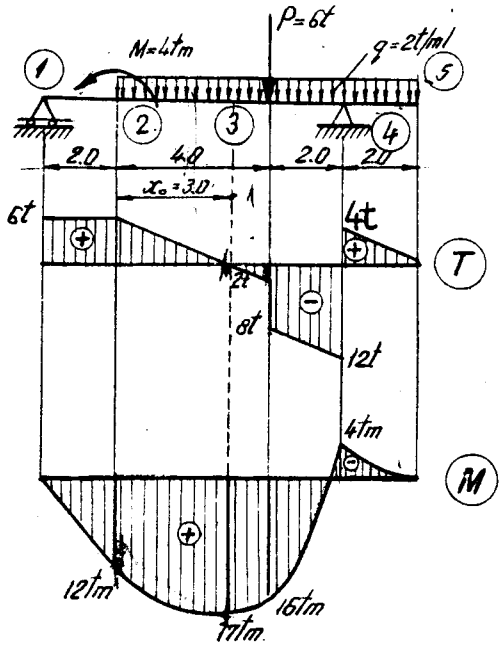


Fig. 95

Calculul reacţiunilor V_1 şi V_4 ($H_4 = 0$)

$$M_4 = 0 = V_1 \times 8 - 4 - 2 \times 8 \times 2 - 6 \times 2$$

$$V_1 = \frac{+4 + 2 \times 8 \times 2 + 6 \times 2}{8} = 6 \text{ t}$$

$$M_1 = 0 = -4 + 6 \times 6 + 2 \times 8 \times 6 - V_4 \times 8$$

$$V_4 = \frac{-4 + 6 \times 6 + 2 \times 8 \times 6}{8} = 16 \text{ t}$$

Verificare :

$6 + 16 = 6 + 2 \times 8$

Forţa tăietoare este constantă pe porţiunea 1-2, şi liniară pe porţiunile 2-3, 3-4 şi 4-5, avînd discontinuităţi în dreptul forţelor concentrate în punctele 3 şi 4.

Forţa tăietoare se anulează la distanţa x_o de punctul 1

$T_{x_0\ 2-3} = 6 - 2\,x_0 = 0$

$x_0 = \frac{6}{2} = 3{,}00$ m

Momentul încovoietor va avea variaţie liniară pe zona 1-2 (T = constant) şi parabolică pe porţiunile 2-3, 3-4 şi 4-5, cu un sălt în dreptul punctului 2 unde se aplică un moment exterior M = 4 Tm

$M_{2st} = + 6 \times 2 = + 12$ Tm

$M_{2dr} = + 12 - 4 = + 8$ Tm

$M_{x_0} = 8 + 6 \times 3 - 2 \times 3 \times 1{,}5 = + 17$ Tm

$M_3 = 17 - 2 \times 1 \times 0{,}5 = 16$ Tm

$M_4 = - 2 \times 2 \times 1 = - 4$ Tm

3.10. Să se traseze diagramele T, N, M pentru grinda din figură.

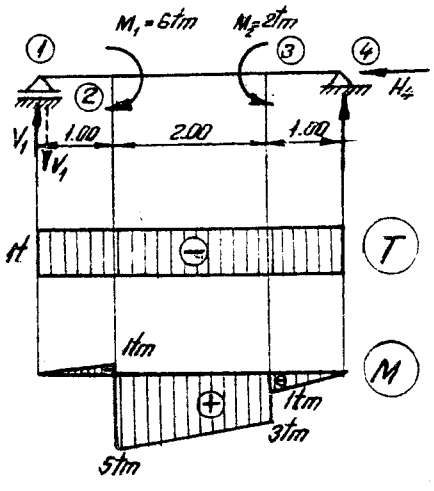


Fig. 96

Din cauza nulei componentei orizontale a forţelor exterioare :

$H_4 = 0$

$M_4 = 0 = V_1 \times 4 + 6 - 2$

$V_1 = \frac{- 6 + 2}{4} = - 1$ T deci sensul reacţiunii nu este cel presupus ci de sus în jos (punctat).

$M_1 = 0 = + 6 - 2 - V_4 \cdot 4$

$V_4 = \frac{6 - 2}{4} = 1$ T

Dat fiind că nu există sarcini exterioare care să dea componente normale pe axa barei (cu excepţia reacţiunilor V_1 şi V_4) forţa tăietoare este constantă pe întreaga grindă, având valoarea de - 1 T.

Intrucît forţa tăietoare este constantă şi negativă, momentul încovoietor va varia linear, cu tangentă negativă (jos stînga, sus dreapta) avînd salturi în dreptul momentelor exterioare.

$M_{2\ st} = - 1 \times 1 = - 1$ Tm

$M_{2\ dr} = - 1 \times 1 + 6 = + 5$ Tm

$M_{3\,st} = -1 \times 3 + 6 = +3$ Tm $\qquad M_{3dr} = -1\times3+6-2 = 1$ Tm

Tangentele la diagrama de momente încovoietoare, respectiv dreptele 1-2, 2-3, 3-4, vor fi paralele între ele, deoarece au acelaş coeficient unghiular (T este constant).

3.11. Să se traseze diagramele N, T, M pentru grinda alăturată.

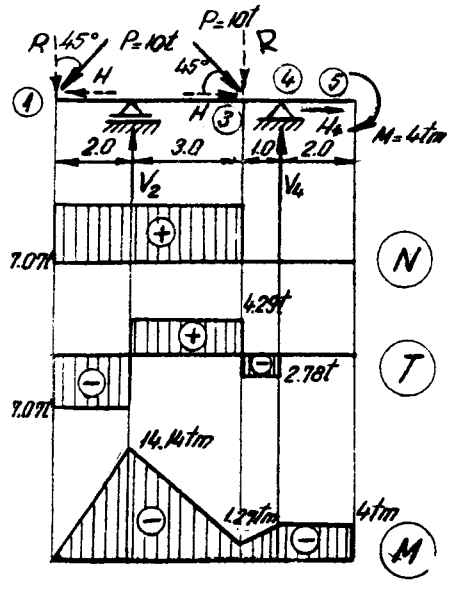


Fig. 27

Vom descompune forţele exterioare P în componentele lor H şi R pe direcţia axei grinzii şi normal pe ea.

$R = H = P \cos 45^\circ = 10 \times 0{,}707 = 7{,}07$ T

Întrucât componentele orizontale (pe direcţia barei) sînt egale şi de sens contrar, rezultă din ecuaţia de proiecţii pe orizontală că împingerea H_4 este nulă.

Forţa axială apare numai pe porţiunea 1-2-3- fiind de întindere.

Reacţiunile verticale V_2 şi V_4 se vor determina din ecuaţiile de momente statice în raport cu punctele 2 şi 4.

$$M_2 = 0 = -7{,}07 \times 2 + 7{,}07 \times 3 - V_4 \cdot 4 + 4$$

$$V_4 = \frac{7{,}07 \times 2 + 7{,}07 \times 1 + 4}{4} = 2{,}78 \text{ T}$$

$$M_4 = 0 = -7{,}07 \times 6 + V_2 \times 4 - 7{,}07 \times 1 + 4$$

$$V_2 = \frac{7{,}07 \times 6 + 7{,}07 \times 1 - 4}{4} = 11{,}36 \text{ T}$$

Verificare : $2{,}78 + 11{,}36 = 7{,}07 + 7{,}07$

Forţa tăietoare are o variaţie constantă (q fiind nul), cu salturi în dreptul forţelor concentrate (vezi diagrama T).

Diagrama momentelor încovoietoare se poate determina pe zone, din diagrama forţelor tăietoare.

Pe zona 1-2, forţa tăietoare este constantă şi negativă momentul încovoietor va fi linear şi cu tangenta negativă (jos stînga, sus dreapta).

In punctul 2 valoarea momentului încovoietor este :

$M_2 = -7{,}07 \times 2 = -14{,}14$ Tm

Între secţiunile 2-3, forţa tăietoare este constantă

şi pozitivă, ceea ce face ca momentul încovoietor să fie liniar şi cu tangenta pozitivă (stînga sus - dreapta jos).

$$M_3 = -7{,}07 \times 5 + 11{,}36 \times 3 = -1{,}27 \text{ Tm}$$

Pe zona 3-4 forţa tăietoare este constantă şi negativă - momentul încovoietor este liniar şi cu tangenta negativă pornind din punctul 3 cu valoarea : $M_3 = -1{,}27$ Tm

In punctul 4 valoarea momentului încovoietor este :

$$M_4 = -7{,}07 \times 6 + 11{,}36 \times 4 - 7{,}07 \times 1 = -4{,}05 \text{ Tm}$$

Luînd din dreapta secţiunii momentul forţelor cu semn schimbat avem :

$$M_4 = -4 \text{ Tm}$$

Diferenţa dintre aceste două valori provine din eroarea de calcul cu rigla (care este în jur de 1% - deci mult sub eroarea admisibilă).

Observaţie: dacă am schimba reazemele punînd articulaţia în 2 şi reazemul simplu în 4, nu s-ar produce nici un fel de modificare în diagramele N, T, M - întrucît reacţiunea orizontală în articulaţie este nulă, articulaţia comportîndu-se cu un reazem simplu.

5.12. Să se construiască diagramele N, T, M pentru grinda cotită din figură.

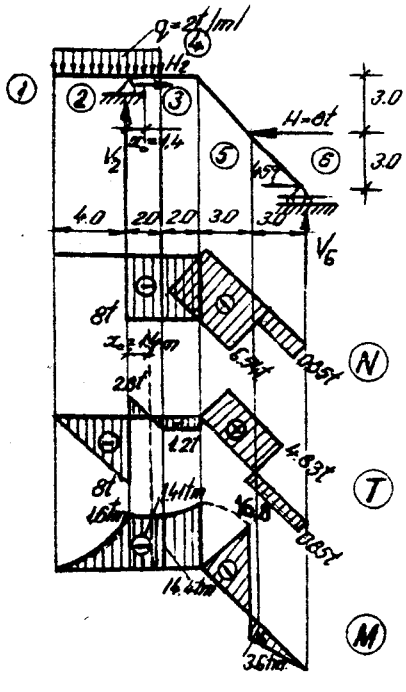


Fig. 98

Reacţiunile sînt :

$$H_2 = 8 \text{ T}$$

$$M_2 = 0 = -2 \times 6 \times 1 + 8 \times 3 - V_6 \times 10$$

$$V_6 = \frac{8 \times 3 - 2 \times 6}{10} = 1{,}2 \text{ T}$$

$$M_6 = 0 = -2 \times 6 \times 11 + V_2 \times 10 + 8 \times 6 - 8 \times 3$$

$$V_2 = \frac{2 \times 6 \times 11 - 8 \times 6 + 8 \times 3}{10} = 10{,}8 \text{ T}$$

Verificare :

$1{,}2 + 10{,}8 = 2 \times 6$

Forţa axială

$$N_{1-2} = 0$$

$$N_{2-3} = N_{3-4} = -8 \text{ T}$$

$$N_{4-5} = +10{,}8 \times 0{,}71 - 2 \times 6 \times 0{,}71 - 8 \times 0{,}71 = -6{,}54 \text{ T}$$

$N_{5-6} = - 1,2 \times 0,71 = - 0,85$ T

Forţa tăietoare

$T_{2\ st} = - 4 \times 2 = - 8$ T

$T_{2\ dr} = - 8 + 10,8 = + 2,8$ T

$T_3 = + 2,8 - 2 \times 2 = - 1,2$

$T_{4\ st} = - 1,2$ T

$T_{4\ dr} = + 10,8 \times 0,71 - 2 \times 6 \times 0,71 + 8 \times 0,71 = + 4,83$ T

$T_{5\ st} = T_{4\ dr} = + 4,83$ T

$T_{5\ dr} = + 4,83 - 8 \times 0,71 = - 0,85$ T

Ne interesează secţiunea unde se anulează forţa tăietoare căci acolo momentul încovoietor are una din valorile maxime.

Anulînd expresia forţei tăietoare în zona 2-3 căpătăm:

$T_{xo\ 2-3} = 2,8 - 2 \times x_o = 0$

$x_o = \frac{2,8}{2} = 1,4$ m

Momentul încovoietor

$M_2 = - 2 \times 4 \times 2 = - 16$ Tm

$M_{xo} = - 2 \times 5,4 \times 2,7 + 10,8 \times 1,4 = - 14,1$ Tm

$M_3 = - 2 \times 6 \times 3 + 10,8 \times 2 = - 14,4$ Tm

$M_4 = - 2 \times 6 \times 5 + 10,8 \times 4 = - 16,80$ Tm

$M_5 = + 1,2 \times 3 = + 3,6$ Tm

Diagrama de momente încovoietoare este paabolică între punctele 1-2 şi 2-3 şi lineară, în zonele 3-4, 4-5 şi 5-6.

Valorile caracteristice maxime ale momentului încovoietor apar în secţiunile unde se anulează forţa tăietoare, respectiv în punctele 2, x_o, 4 şi 5, - valoarea cea mai mare se poate stabili prin calcul şi se constată ca în secţiunea 4, unde momentul încovoietor are valoarea $M_4 = - 16,80$ Tm

3.13. Se dă grinda cotită din figura alăturată. Să se traseze diagramele N, T. M.

Se va alege iniţial un sens de parcurgere - şi anume cel indicat în figură prin săgeaţi.

Reacţiunile V_1, V_4 şi H_4 vor fi :

$H_4 = 4$ T

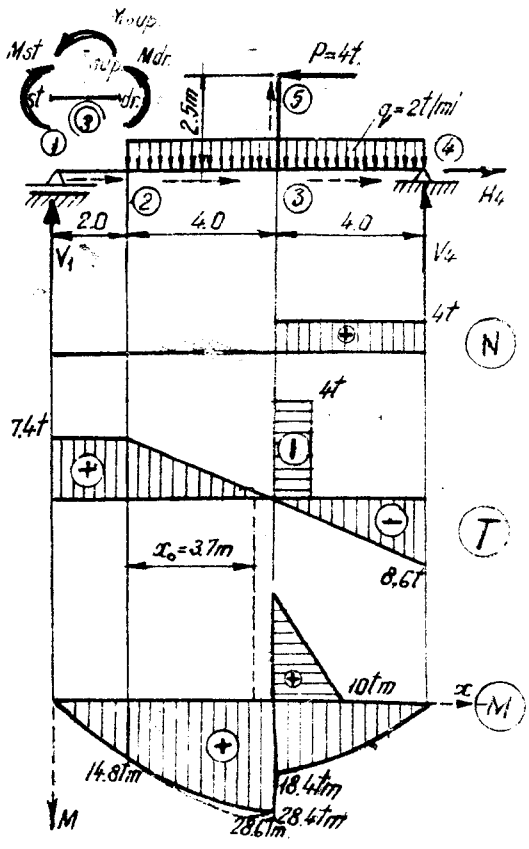


Fig. 99

$$V_1 = \frac{2x8x6-4x2,5}{10} = + 7,4 \text{ t}$$

$$V_4 = \frac{2x8x6-4x2,5}{10} = 8,6 \text{ t}$$

Verificare :

$7,4 + 8,6 = 2 \times 8$

Forţa axială apare numai în tronsonul 3-4 - fiind pozitivă de întindere.

Forţa tăietoare are o variaţie constantă pe zona 1-2, liniară pe porţiunea 2-3-4 şi constantă pe porţiunea 3-5, unde semnul forţei tăietoare este negativ datorită sensului de parcurgere ales.

Pentru a afla secţiunea unde forţa tăietoare se anulează, scriem expresia forţei tăietoare într-o secţiune x_0 - (T_{x_0}) apoi anulându-o, găsim secţiunea unde momentul încovoietor are valoare maximă.

$$T_{x_0} = + 7,4 - 2\ x_0 = 0$$

de unde $x_0 = \frac{7,4}{2} = 3,7$ m

Momentul încovoietor îl vom stabili pe porţiuni pornind de la diagrama forţei tăietoare.

Pe porţiunea 1-2 forţa tăietoare este constantă şi pozitivă, momentul încovoietor va fi liniar şi cu tangenta pozitivă (orientarea stânga sus - dreapta jos); în punctul 2 atinge valoarea :

$$M_2 = + 7,4 \times 2 = 14,8 \text{ tm}$$

Pe porţiunea 2-6 forţa tăietoare este liniară pozitivă şi scade ajungând la punctul 6 la valoarea zero, deci momentul încovoietor va fi parabolic, cu tangenta pozitivă din ce în ce mai mică ca valoare, ajungând orizontală în dreptul punctului 6 - fiind că în acest punct momentul încovoietor să ajungă la valoarea maximă.

$$M_6 = + 7,4 \times 5,7 - \frac{2 \times 3,7^2}{2} = + 28,6 \text{ Tm}$$

Pe porţiunea 2-3-4 forţa tăietoare fiind lineară, negativă şi crescătoare în valoare absolută, momentul încovoietor va varia parabolic, cu tangenta negativă (înclinare stînga jos, - dreapta sus) mereu din ce în ce mai mare.

Ceea ce ne poate indica însă diagrama de forţă taietoare, este saltul produs în curba de moment încovoietor în dreptul punctului 3, datorită forţei orizontale P aplicate pe bara 3 - 5. În jurul punctului 3 avem următoarele valori de momente încovoietoare (reprezentate pe figură) :

- $M_{st} = + 7,4 \times 6 - 2 \times 4 \times 2 = 28,4$ Tm
- $M_{sup} = + 4 \times 2,5 = + 10$ Tm
- $M_{dr} = + 28,4 - 4 \times 2,5 = + 18,4$ Tm

Pe bara 3-5 forţa tăietoare este constantă şi negativă, deci momentul va avea o variaţie lineară şi cu tangenta negativă.

Ca o remarcă, se poate constata că deşi în jurul punctului 3 avem toate momentele încovoietoare cu acelaş semn (+), totuşi întrucît M_{st} se aplică pe secţiunea din dreapta, iar M_{sup} şi M_{dr} se aplică pe secţiunile din stînga, nodul 3 este în echilibru ($\sum M = 0$)

5.14. Se dă grinda cotită din figură. Să se calculeze diagramele N, T, M.

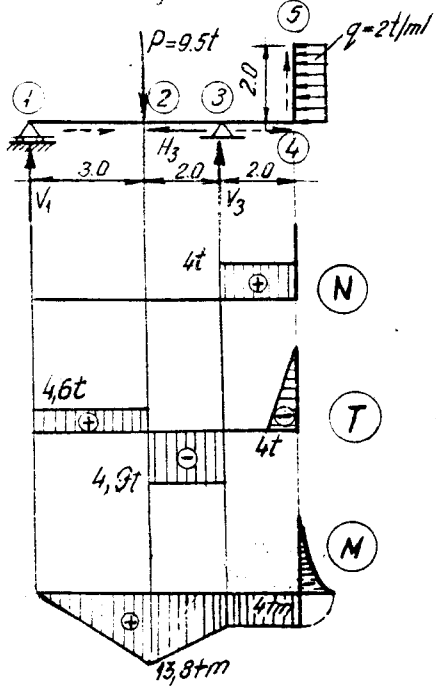


Fig. 5.14

Vom determina reacţiunile V_1 şi V_3 din ecuaţiile de momente, iar din ecuaţia de proiecţie pe orizontală pe H_3.

$H_3 = 2 \times 2 = 4$ T

$M_3 = 0 = V_1 \times 5 - 9,5 \times 2 - 2 \times 2 \times 1$

$$V_1 = \frac{9,5 \times 2 + 2 \times 2 \times 1}{5} = 4,6 \text{ T}$$

$M_1 = 0 = - V_3 \times 5 + 3 \times 9,5 - 2 \times 2 \times 1$

$$V_3 = \frac{3 \times 9,5 + 2 \times 2 \times 1}{5} = 4,9 \text{ T}$$

Verificarea reacţiunilor verticale se face cu ajutorul ecuaţiei de proiecţie pe verticala.

$4,6 + 4,9 = 9,5$

Stabilim ca sens de parcurgere cel indicat pe figură.

Forţa axială există numai pe porţiunea 3–4 şi are valoarea + 4 T.

Forţa tăietoare are o variaţie constantă pe porţiunea 1–2–3–4. – q fiind nul şi liniară pe porţiunea 4–5, unde q are o valoare constantă q = 2 t/ml

Diagrama de momente încovoietoare se deduce din diagrama de forţe tăietoare şi anume :

Pe zona 1–2 forţa tăietoare este constantă şi pozitivă momentul încovoietor va fi linear cu tangenta pozitivă (încreptată din stînga sus dreapta jos) şi pornind de la valoarea zero.

Momentul încovoietor în punctul 2 va avea valoarea

$M_2 = +4,6 \times 5 = 13,8$ Tm

Pe porţiunea 2–3, forţa tăietoare este negativă şi constantă deci momentul încovoietor va varia linear, schimbînd însă înclinarea, (tangenta devine negativă) astfel că în punctul 2 apare o frîngere în diagrama de momente încovoietoare.

Momentul încovoietor în punctul 3 are valoarea :

$M_3 = 4,6 \times 5 - 9,5 \times 2 = + 4$ Tm

Intre punctele 3–4 forţa tăietoare este nulă, deci momentul încovoietor va fi constant, avînd valoarea + 4 Tm.

In punctul 4, momentul încovoietor de pe bara 4–5 este egal şi de acelaş sens cu cel din bara 3–4.

Pe zona 4–5, forţa tăietoare este liniară, negativă şi scade ca valoare de la 4 spre 5; momentul încovoietor va varia parabolic cu tangenta negativă, care scade ca valoare, ajungînd în punctul 5 la zero, adică tangenta devine verticală (axa absciselor pe zona 4–5 este verticală).

3.15. Să se traseze diagramele N, T, M pentru grinda din figură.

Din cauza simetriei reacţiunilor verticale V_1 şi V_2 sînt egale iar H_2 este nulă, întrucît nu sînt forţe orizontale.

$$V_1 = V_2 = \frac{2 \times 4}{2} = 4 \text{ T}$$

Pentru a determina forţa axială şi forţa tăietoare, trebuie să calculăm proiecţiile reacţiunilor verticale V_1 şi V_2 pe direcţia axei barei: H_1 şi H_2 şi normal pe axa barei: R_1 şi R_2.

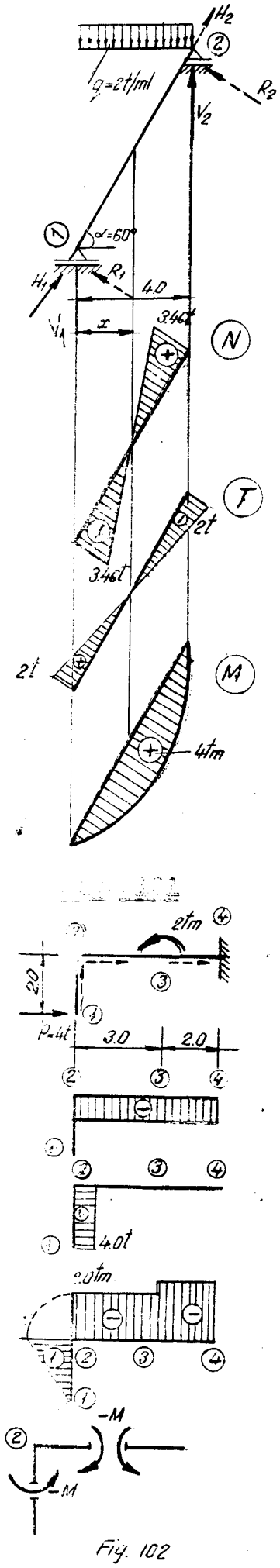


Fig. 102

$V_1 = R_2 = V_1 \cos\alpha = 4 \times 0,5 = 2$ T

$H_1 = H_2 = V_1 \sin\alpha = 4 \times 0,865 = 3,46$ T

Expresiile forţei axiale şi tăietoare într-o secţiune curentă x se scrie :

$N_x = - H_1 + qx \sin\alpha = -3,46+2.x.0,865$

$T_x = + R_1 - q \times \cos\alpha = + 2-2. x . 0,5$

Se poate vedea că ambele eforturi au o variaţie liniară, anulîndu-se la mijloc.

Momentul încovoietor are o variaţie parabolică, deoarece forţa tăietoare are o variaţie liniară, cu convexitatea în jos(în sensul încărcării uniform distribuite q).

Valoarea maximă a momentului încovoietor este la mijlocul grinzii.

$M_{max} = 4 \times 2 - 2 \times 2 \times 1 = + 4$ tm

3.16. Să se traseze diagramele N, T, M pentru grinda din figură.

Ne alegem ca sens de parcurs sensul 1-2-3-4, arătat cu săgeţi pe figura alăturată.

Pe porţiunea 1-2, nu există forţa axială, în schimb pe porţiunea 2 - 3 - 4 forţa axială este constantă, negativă (comprimă bara) şi egală ca valoare cu - 4,0 t.

Forţa tăietoare pe porţiunea 1-2 are variaţie constantă cu valoare negativa egală cu 4 t (q = 0, T = ct) urmînd ca pe zona 2 - 4 forţa tăietoare să fie nulă întrucît nici o forţă din stînga secţiunii nu are componentă normală pe axa barei pe care este situată).

Ca verificare: în nod 1 2 trebuie ca forţa axială de pe bara 1-2 să aibe aceeaşi valoare ca forţa tăietoare de pe bara

1-2 să fie egală cu forţa axială de pe bara 2-3-4 = ceea ce rezultă din ecuaţiile de proiecţii ce se pot scrie izolînd nodul 2.

Curba de momente se trasează pe porţiuni. Pe porţiunea 1-2 forţa tăietoare este constantă şi negativă, deci momentul încovoietor va varia liniar şi cu tangenta negativă (stînga jos-dreapta sus), axa absciselor fiind axa verticală 1-2 cu originea în 1, conform sensului de parcurs luat iniţial. In punctul 2 momentul încovoietor are valoarea :

$$M_2 = - 4,00 \times 2 = - 8 \text{ Tm}$$

Pentru ca nodul 2 să fie în echilibru, momentele încovoietoare de pe bara 1-2 şi de pe bara 2-3-4 trebuie să fie egale şi de acelaş semn (vezi figura).

Pe zona 2-3-4, întrucît forţa tăietoare este nulă, înseamnă că variaţia momentului încovoietor va fi constantă şi anume: pe zona 2-3 are o valoare de - 8 Tm, producîndu-se în punctul 3 un salt avîn valoarea momentului exterior: M = 2 Tm

Deci $M_{2-3} = - 8$ Tm iar

$$M_{3-4} = - 8 - 2 = - 10 \text{ Tm}$$

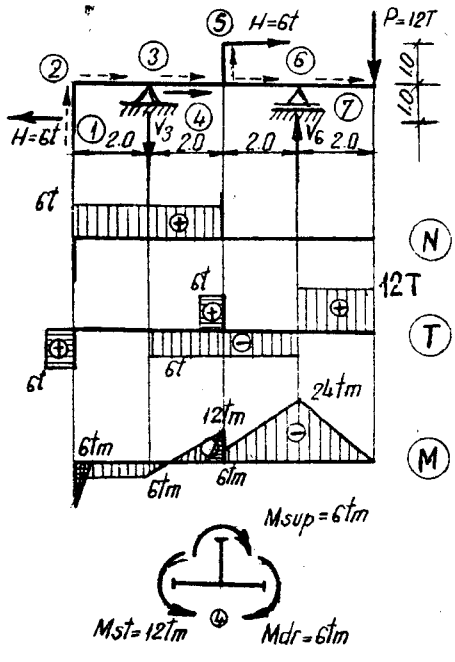


Fig. 103

3.17. Să se traseze diagramele N, T, M pentru grinda din figură.

Reacţiunile grinzii sînt :

$$H_3 = 0$$

$$M_3 = 0 = + 12 \times 6 - V_6 \times 4 + 6 \times 2$$

$$V_6 = \frac{12 \times 6 + 6 \times 2}{4} = 21 \text{ T}$$

$$M_6 = 0 = - V_3 \times 4 + 12 \times 2 + 6 \times 2$$

$$V_3 = \frac{12 \times 2 + 6 \times 2}{4} = 9 \text{ T}$$

Verificare :

18 - 6 = 12

Sensul de parcurs este cel ales pe figura.

Forţa axiala apare numai pe zona 2 - 3 - 4 .

$N_{2-3} = + 6 \text{ t} = N_{3-4}$

Forţa taietoare are valori constante pe porţiunile 1-2 2-3-4, 6-7, 4-5 şi nulă pe porţiunea 3-5.

Momentul încovoietor are următoarele valori caracteristice în diverse secţiuni şi anume :

$M_2 = M_3 = + 6 \times 1 = + 6$ Tm

M_4 stînga $= + 6 \times 1 - 9 \times 2 = - 12$ Tm

M_4 superior $= - 6 \times 1 = - 6$ Tm

M_4 dreapta $= - 12 + 6 = - 6$ Tm

$M_6 = - 12 \times 2 = - 24$ Tm

3.18. Să se traseze diagramele N,T,M pentru sistemul din figură.

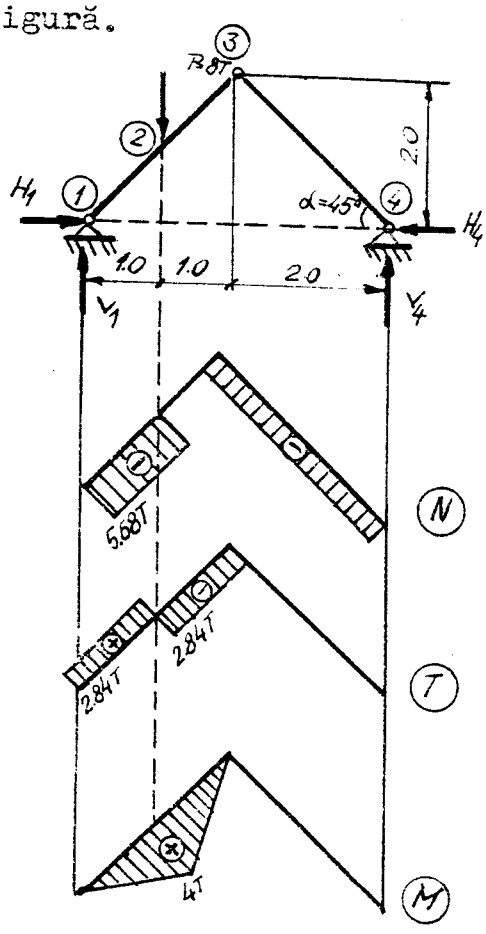


Fig.104

Avînd patru necunoscute: V_1, V_4, H_1 şi H_4 va trebui să scriem 4 ecuaţii pentru determinarea lor: trei vor fi ecuaţii de echilibru, iar a patra relaţie se va scrie în punctul 3, punîndu-se condiţia ca momentul încovoietor să fie nul (fiind articulaţie se poate roti fără a prelua moment)

Din ecuaţiile de momente statice în raport cu punctele 1 şi 4 vor rezulta valorile reacţiunilor verticale V_1 şi V_4.

$M_1 = 0 = + 8 \times 1 - V_4 \times 4$

$V_4 = \frac{8 \times 1}{4} = 2$ T

$M_4 = 0 = V_1 \times 4 - 8 \times 3$

$V_1 = \frac{8 \times 3}{4} = 6$ T

Verificarea : $6 + 2 = 8$

Din ecuaţia de proiecţie pe orizontală rezultă :

$H_1 = H_4 = H$

Scriind că momentul încovoietor în 3 este nul (luînd momentul forţelor din dreapta cu semn schimbat):

$+ V_4 \cdot 2 - H_4 \cdot 2 = 0$

$2 \times 2 - H \cdot 2 = 0$ de unde $H = 2$ T

Expresiile forţei axiale N şi a forţei tăietoare T pe diverse porţiuni se vor scrie :

$N_{1-2} = -6 \times 0,71 - 2 \times 0,71 = -5,68$ T

$N_{2-3} = 0$

$N_{3-4} = -12 \times 0,71 - 2 \times 0,71 = -9,94$ T

$T_{1-2} = +6 \times 0,71 - 2 \times 0,71 = +3,84$ T

$T_{2-3} = -2,84 - 8 \times 0,71 = -2,84$ T

$T_{3-4} = 0$

Momentul încovoietor are o variaţie liniară pe porţiunea 1-2 şi 2-3 (T fiind constant), iar pe porţiunea 3-4 are o valoare constantă (T = 0) egală cu zero.

Valoarea în punctul 2 a momentului încovoietor este

$M_2 = 6 \times 1 - 2 \times 1 = +4$ Tm

19. Se dă grinda din figură. Se cere să se traseze diagramele N, T, M.

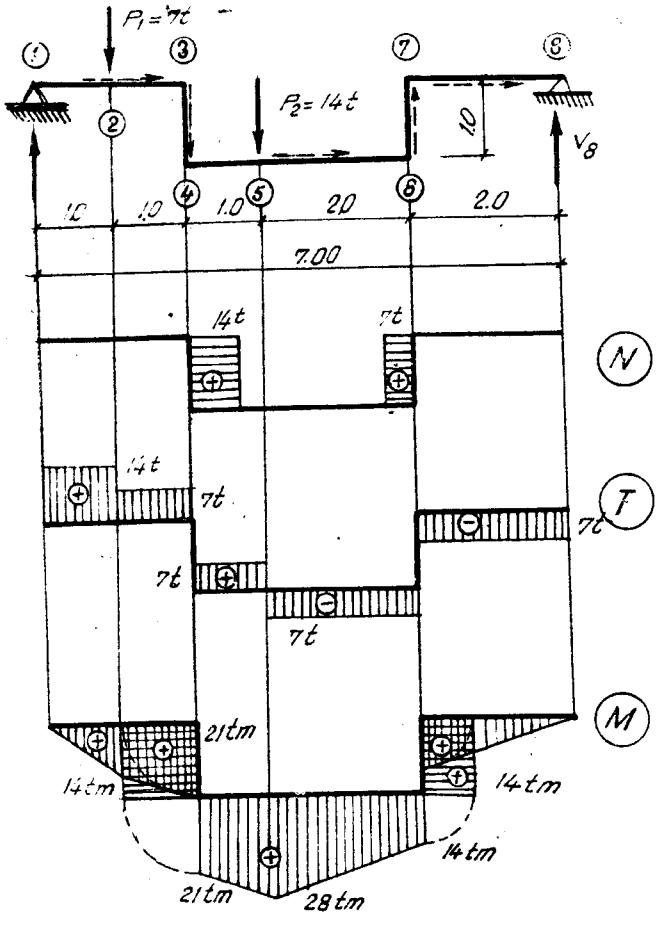


Fig. 105

Se determină reacţiunile V_1 şi V_8 :

$M_8 = 0 = V_1 \times 7 - 7 \times 6 - 14 \times 4$

$V_1 = \frac{7 \times 6 + 14 \times 4}{7} = 14$ t

$M_1 = 0 = 7 \times 1,0 + 14 \times 3,0 - V_8 \times 7$

$V_8 = \frac{7 \times 1 + 14 \times 3}{7} = 7$ t

Verificare :

$7 + 14 = 14 + 7$

Alegem ca sens de parcurgere cel indicat din figură.

Forţa axială apare numai pe porţiunile 3-4 şi 6-7, pe ambele zone fiind pozitivă, (de întindere).

Forţa tăietoare ia naştere pe zonele 1-2-3 şi 4-5-6 şi 7-8, avînd salturi în dreptul forţelor concentrate.

Pentru trasarea diagramei de momente încovoietoare ne vom ghida după forţa tăietoare care are valori constante pe tot par-

cursul, deci variaţia momentului încovoietor va fi liniară.

Valorile caracteristice ale curbei momentului încovoietor sînt următoarele :

$M_2 = + 14 \times 1 = 14$ Tm

$M_3 = M_4 = + 14 \times 2 - 7 \times 1 = 21$ Tm

$M_5 = 14 \times 3 - 7 \times 2 + 28$ Tm

$M_6 = M_7 = 7 \times 2 = 14$ Tm

P 20. Să se traseze diagramele T şi M pentru grinda cu articulaţii şi console din figură.

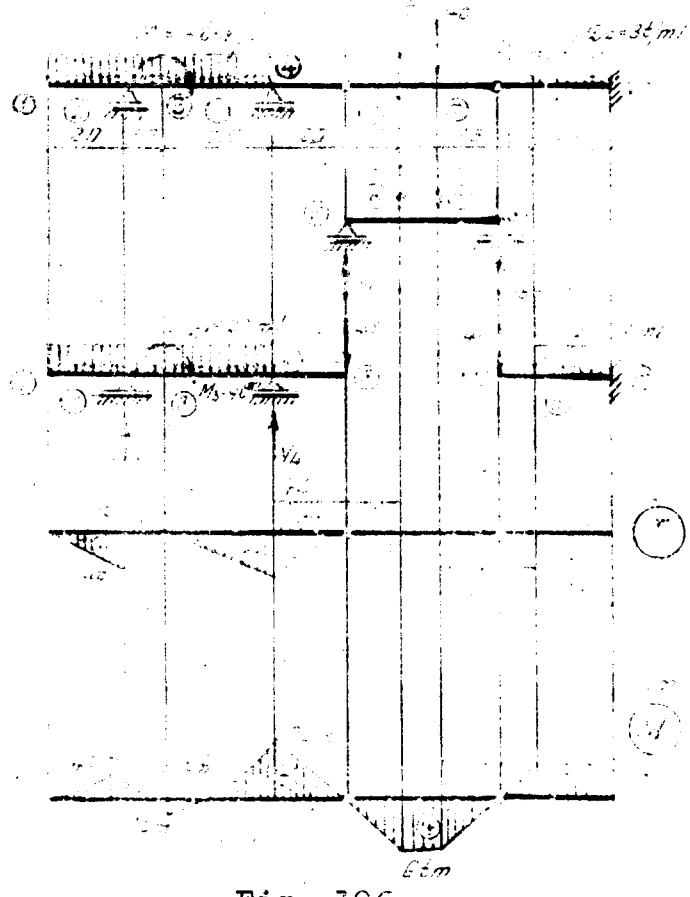


Fig. 106

Grinda din figură se poate descompune în trei grinzi.

Grinda independentă 5-6-7-8, se sprijină pe grinzile principale 1-2-3-4-5 şi 8-9-10, care în consecinţă vor avea ca încărcare pe lîngă sarcinile care se aplică direct pe ele şi reacţiunile V_5 şi V_8 ale grinzii independente 5-6-7-8.

Calculînd reacţiunile V_5 şi V_8 ale grinzii independente, vom putea determina apoi reacţiunile V_2 şi V_4 ale grinzii principale 1-2-3-4-5.

$M_4 = 0 = V_2 \times 4 + 4 + 4 \times 2 - 2 \times 6 \times 3$

$M_2 = 0 = - V_4 \times 4 + 2 \times 6 \times 1 + 4 + 4 \times 6$

$V_2 = 6$ T

$V_4 = 10$ T

Trasăm diagrama de forţă tăietoare pe întreaga grindă; se observă că forţa tăietoare nu-şi modifică valoarea în dreptul articulaţiilor 5 şi 8, în aceste puncte aplicîndu-se cîte 2 forţe la aceiaşi valoare dar de sens contrar.

Reiese că reacţiunea V_{10} este egală cu 10 T

Diagrama momentului încovoietor se deduce uşor din diagrama de forţă tăietoare. Vom calcula valori ale diagramei de momente încovoietoare în cîteva secţiuni caracteristice.

$M_2 = - 2 \times 2 \times 1 = - 4$ Tm

$M_{3\ st} = + 6 \times 1 - 2 \times 3 \times 1{,}5 = - 3$ Tm

$M_{3\ dr} = - 3 + 4 = + 1$ Tm

$M_4 = - 4 \times 2 = - 8$ Tm

$M_5 = 0$

$M_6 = + 4 \times 1{,}5 = 6$ Tm $= M_7$

$M_8 = 0$

$M_9 = - 4 \times 1 = - 4$ Tm

$M_{10} = - 4 \times 3 - 3 \times 2 \times 1 = - 18$ Tm

Ca o remarcă în punctele 5 şi 8 avem racordări în diagrama de momente încovoietoare întrucît în fiecare din aceste secţiuni tangentele (respectiv forţele tăietoare) se modifică ca valoare.

3.21. Să se traseze diagramele T şi M pentru grinda cu articulaţii şi console din figură.

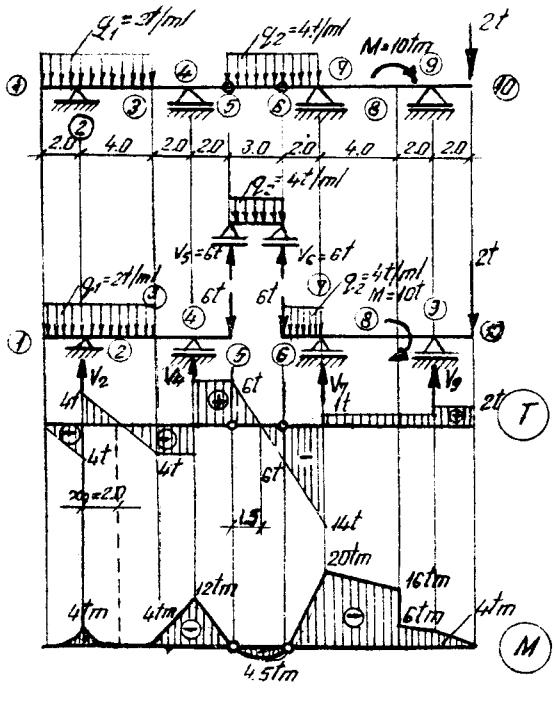


Fig. 107

Grinda cu console şi articulaţii din figură se compune din două grinzi principale 1-2-3-4-5 şi 6-7-8-9-10, care susţin grinda independentă 5-6.

Pentru calculul grinzilor principale vom lua în considerare şi reacţiunile V_5 şi V_6, pe lîngă celelalte forţe exterioare care se aplică.

Reacţiunile V_5 şi V_6 sînt egale (din cauza simetriei) avînd valoarea 6 T.

Vom determina apoi reacţiunile V_2 şi V_4 pentru grinda principală din stînga şi V_7 şi V_9 pentru grinda principală din

dreapta

$$M_4 = 0 = V_2 \times 6 - 4 \times [illegible] \times 5 + 6 \times 2$$

$$M_2 = 0 = -V_4 \cdot 6 + 2 \times 6 \times 3 + 6 \times 8$$

Rezultă

$V_2 = 8$ T şi $V_4 = 10$ T

$$M_9 = 0 = V_7 \times 6 - 6 \times 8 - 4 \times 2 \times 7 + 10 + 2 \times 2$$

$$M_7 = 0 = -V_9 \times 6 + 2 \times 8 + 10 - 4 \times 2 \times 1 - 6 \times 2$$

Rezultă

$V_7 = 15$ T şi $V_9 = 1$ T

Diagramele de forţă tăietoare şi de momente încovoietoare se construiesc pentru întreaga grindă.

$M_1 = -2 \times 2 \times 1 = -4$ Tm

$M_{10} = -2 \times 4 \times 2 + 8 \times 2 = 0$

$M_3 = -2 \times 6 \times 3 + 6 \times 4 = -4$ Tm

$M_4 = -6 \times 2 = -12$ Tm

$M_5 = 0$

$M_6 = +6 \times 1,5 - 4 \times 1,5 \times 0,75 = -4,5$ Tm

$M_8 = 0$

$M_7 = -2 \times 1 - 4 \times 1 \times 1 = -20$ Tm

$M_{8\,st} = -6 \times 6 - 2 \times 4 \times 5 + 15 \times 4 = -16$ Tm

$M_{8\,dr} = -16 + 10 = -6$ Tm

$M_9 = -2 \times 2 = -4$ Tm

3.22. Se vor construi grinda şi apoi verifica analitic diagramele de forţă tăietoare şi moment încovoietor pentru grinda din figura alăturată.

Se adoptă o anumită scară a lungimilor şi a forţelor construind poligonul forţelor şi razele polare 1, 2 şi 3.

Se trasează apoi poligonul funicular având razele I,2 şi 3, iar ca latură de închidere 4 ; ducând o paralelă la aceasta în poligonul forţelor prin polul O, obţinem reacţiunile V_1 şi V_2 şi deci putem determina diagrama forţelor tăietoare.

Momentele încovoietoare se măsoară la scara momentelor care se determină astfel :

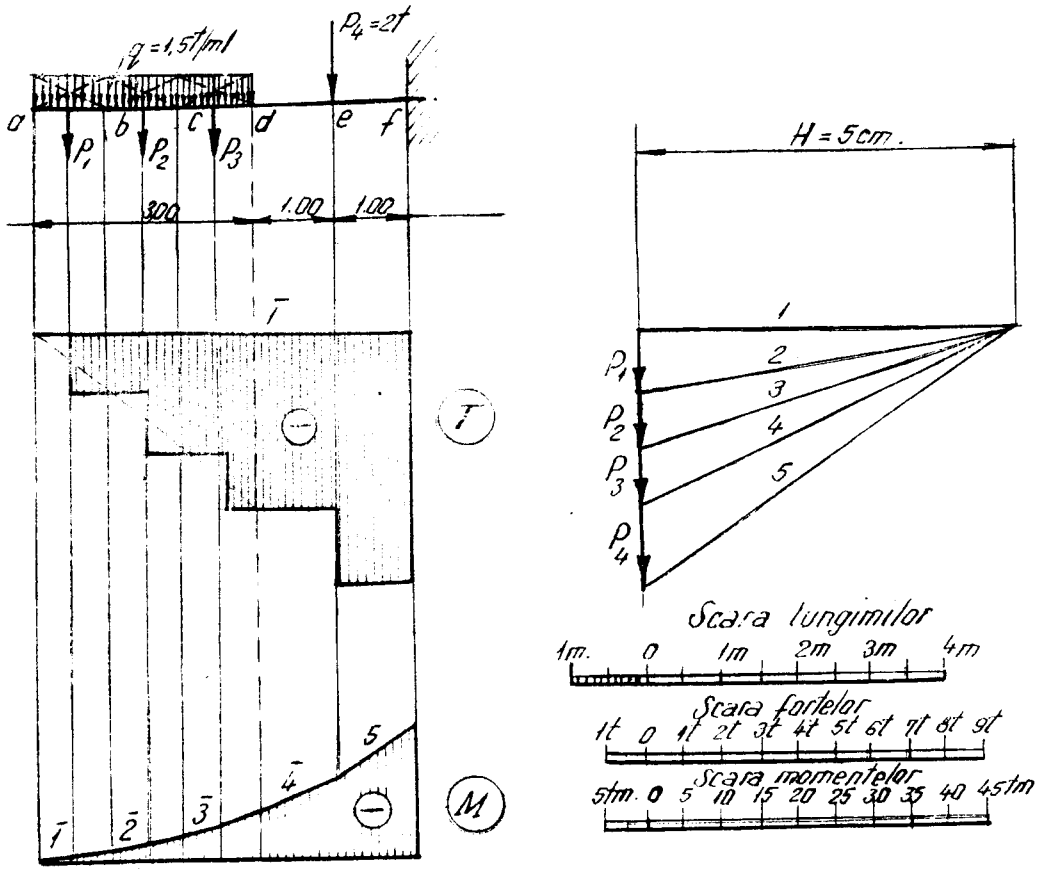


Fig. 102

Dacă la scara lungimilor 1 cm (în desen) = a m
la scara forțelor 1 cm " " = b kg
și H distanța polară

atunci la scara momentelor 1 cm desen = a · b kgm

În cazul nostru :

la scara lungimilor 1 cm în desen = 1.00 m
la scara forțelor 1 cm în desen = 2.000 kg

H = 5 cm

deci 1 m la scara momentelor în desen = 1 · 2.000 · 5 =

= 1.000.000 kg = 10 tm

Deci pentru determinarea forței tăietoare într-o secțiune se citesc segmentele t la scara forțelor, iar momentele încovoietoare sînt reprezentate de segmentele m măsurate la scara momentelor.

verificare :

$$V_1 = \frac{2 \times 1 + 2 \times 2}{6} = 1,33 \text{ t}$$

$$V_2 = \frac{3 \times 3 + 2 \times 5}{6} = 3{,}17 \text{ t}$$

$$M_a = 1{,}83 \times 3 = 5{,}49 \text{ Tm}$$

$$M_b = 3{,}17 \times 1 = 3{,}17 \text{ Tm}$$

3.23. Se vor determina grafic diagramele de forţă tăietoare şi moment încovoietor pentru grinda încastrată din figură.

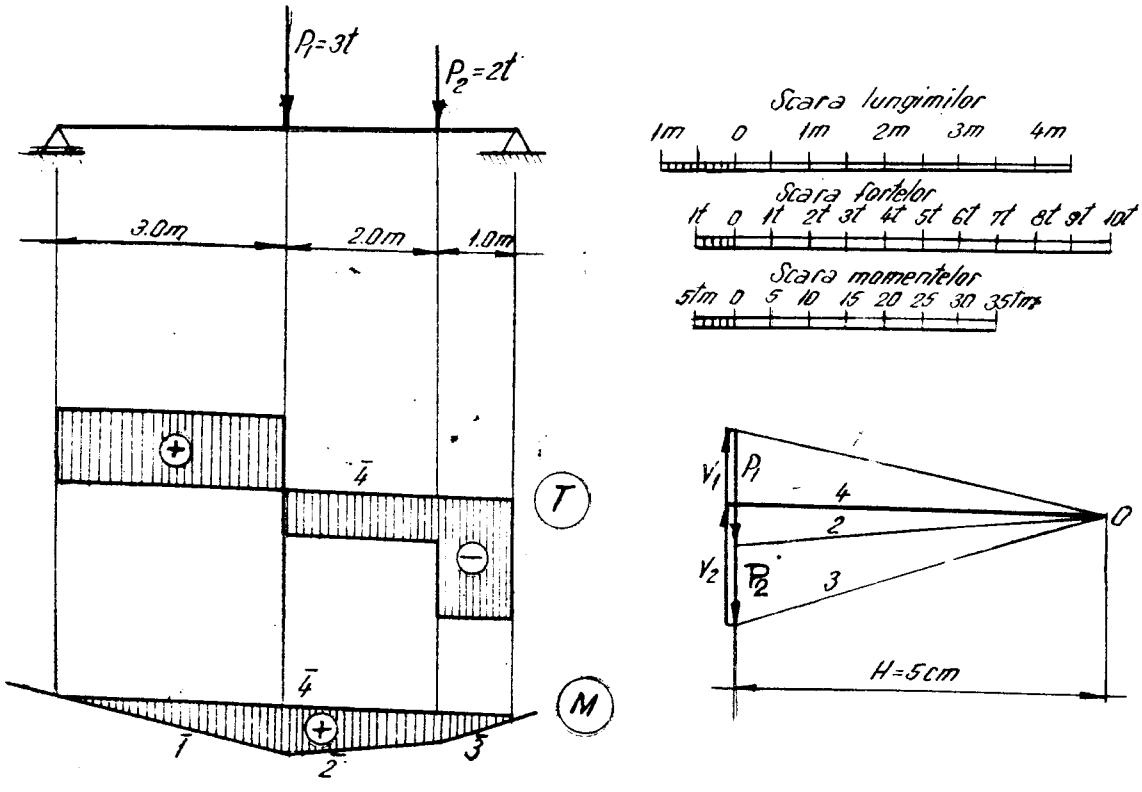


Fig. 109

Vom aproxima sarcina uniform distribuită cu forţele concentrate P_1, P_2 şi P_3 (de aici reiese că valorile exacte pentru forţa tăietoare şi momente încovoietoare sînt cele în dreptul secţiunilor a, b, c şi d).

Ca mod de construcţie al diagramelor se procedează la alegerea unui pol o şi la trasarea unui poligon al forţelor cu razele polare 1, 2, 3, 4, 5.

Se construiesc apoi poligonul funicular 1, 2, 3, 4, 5 pe care se măsoară momentele încovoietoare; segmentele m se măsoară la scara momentelor. Apoi se trasează diagrama forţelor tăietoare - segmentele t fiind măsurate la scara forţelor.

Ca scări se folosesc următoarele :

pentru lungimi 1 cm în desen = 100 cm

pentru forţe 1 cm în desen = 2000 kg

pentru momente 1 cm în desen = 10 Km (distanţa polară H = 5 cm)

CAPITOLUL IV

MOMENTE DE INERȚIE ALE FIGURILOR PLANE

In cazul unei suprafețe plane de arie (A), raportată la un sistem de axe în planul ei (yoz), se pot defini următoarele noțiuni (fig. 110).

Ne vom raporta la un element infinit mic de suprafață (dA).

- Momente statice (S)

$$S_z = \int_{(A)} y \cdot dA; \quad S_y = \int_{(A)} z \cdot dA \qquad (cm^3)$$

Ele sînt nule în raport cu axa care trece prin centrul de greutate al suprafeței.

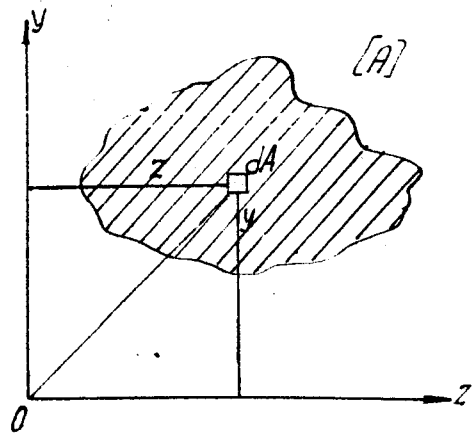


Fig. 110

Momente de inerție axiale (I)

$$I_z = \int_{(A)} y^2 \cdot dA \qquad I_y = \int_{(A)} z^2 \cdot dA \qquad (cm^4)$$

Rezultînd dintr-o sumă de pătrate, momentul de inerție axial este întotdeauna pozitiv.

Dacă axele "oy" sau "oz" trec prin centrul de greutate al suprafeței, se obțin momente de inerție axiale centrale.

- Moment de inerție centrifugal

$$I_{zy} = \int_{(A)} z \cdot y \, dA$$

El poate fi pozitiv sau negativ, în funcție de semnul lui y și z sau chiar nul.

- Moment de inerție polar

$$I_p = \int_{(A)} r^2 \cdot dA \qquad I_p = I_z + I_y$$

- Momente de inerție în raport cu axe paralele

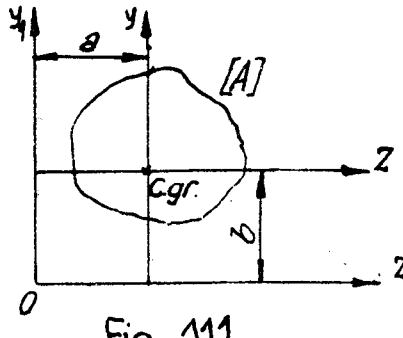


Fig. 111

$$I_{z_1} = I_z + A \cdot b^2$$

$$I_{y_1} = I_y + A \cdot a^2$$

$$I_{z_1 y_1} = I_{zy} + A \cdot a \cdot b$$

- Razele de inerție (de giratie), se definesc prin relațiile

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \; ; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \; (cm)$$

- Momente de inerţie în raport cu axe rotite.

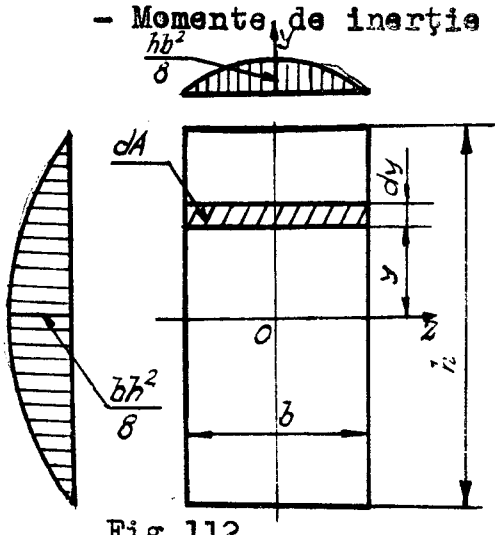


Fig.112

Cunoaştem I_z, I_y, I_{zy}

Faţă de noile axe (yoz), rotite cu un unghi α, în sens trigonometric faţă de (yoz), obţinem

$$I_{z_1} = I_z \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha - 2I_{zy} \sin\alpha\cos\alpha$$

$$I_{y_1} = I_y \cos^2\alpha + I_z \sin^2\alpha + 2I_{zy} \sin\alpha\cos\alpha$$

$$I_{z_1y_1} = (I_z - I_y) \sin\alpha\cos\alpha + I_{zy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

Este mai comod să scriem această formulă de funcţie de unghiul "2α".

Vom căpata

$$I_{z_1} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{zy} \sin 2\alpha$$

$$I_{y_1} = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{zy} \sin 2\alpha$$

$$I_{z_1y_1} = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{zy} \cos 2\alpha$$

- Momente de inerţie principale; direcţii principale. Variem unghiul α pînă obţinem o valoare maximă ($I_z \rightarrow I_1$) respectiv minimă ($I_y \rightarrow I_2$) a momentelor de inerţie. Momentul de inerţie centrifugal faţă de axele principale este nul.

$$(I_{z_1y_1} \rightarrow I_{12} = 0)$$

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}\left[(I_z + I_y) \pm \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}\right]$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z} \quad \text{(cazul: } I_z > I_y\text{)}$$

Ecuaţia elipsei de inerţie, raportată la axele principale

$$\frac{z^2}{i_y^2} + \frac{y^2}{i_z^2} = 1$$

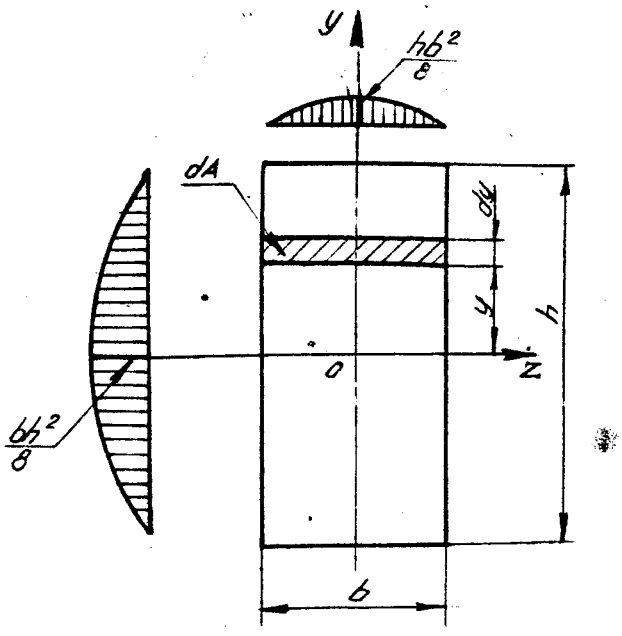


Fig. 113

- **Aplicaţii la cîteva figuri simple**

1. Dreptunghiul (fig. alăturată)

Moment static (S)

$$S_z = \int_{(A)} y \cdot dA = \int_{y}^{\frac{h}{2}} y \cdot b \cdot dA$$

$$S_z = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \quad (cm^3)$$

Aceasta este ecuaţia unei parabole de gr. II.

Momentele de inerţie (I)

$$I_z = \int_{(A)} y^2 \cdot dA =$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 \cdot b \, dy = \frac{b\,h^3}{12} \quad (cm^4)$$

$$I_y = \frac{h\,b^3}{12}$$

$I_{zy} = 0$ (axele "yoz" sînt axe de simetrie)

- Modulul de rezistenţă (W)

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{b\,h^2}{6} \cdot \qquad (cm^3)$$

$$W_y = \frac{hb^2}{6}$$

Razele de giraţie (i).

$$i_z = \sqrt{\frac{b\,h^3}{12} \times \frac{1}{5\,h}} \cong 0{,}289 \cdot h \qquad (cm)$$

$$i_y = 0{,}289 \cdot b$$

2. Pătratul (a = b = h)

$$S_z = \frac{a}{2}\left(\frac{a^2}{4} - y^2\right); \quad S_a^{max} = \frac{a^3}{8}$$

$$I_z = I_y = \frac{a^4}{12}; \quad I_{zy} = 0$$

3.- Secţiunea tubulară

$$S_z^{max} = \frac{BH^2 - bh^2}{8}, \quad S_y^{max} = \frac{HB^2 - hb^2}{8}$$

$$I_z = \frac{BH^3 - bh^3}{12}; \quad I_y = \frac{HB^3 - hb^3}{12}$$

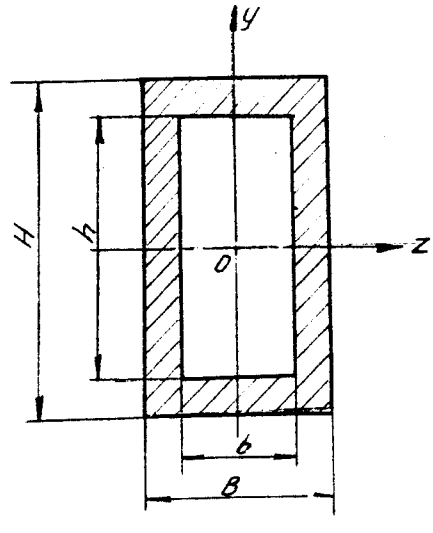


Fig. 114

$I_{zy} = 0$

4.- Dreptunghi distanțate.

$$S_z^{max} = \frac{B(H^2-b^2)}{8} \quad ; \quad S_y^{max} = \frac{B^2(H-b)}{8}$$

$$I_z = \frac{B(H^3-b^3)}{12} \quad ; \quad I_y = \frac{B^3(H-b)}{12}$$

$$I_{zy} = 0$$

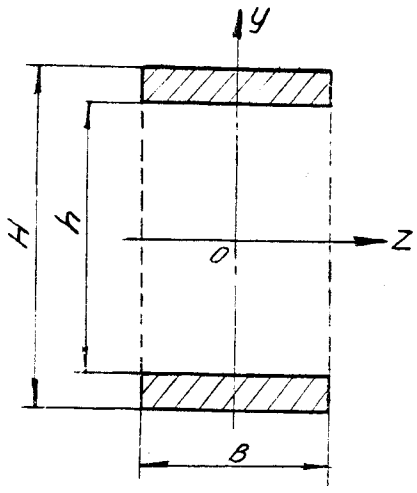


Fig.115

5.- Cercul

$$S_z = S_y = \frac{2}{3}\sqrt{(r^2 - y^2)^3} \qquad S_{z,y}^{max} = \frac{2r^3}{3}$$

$$I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64} \quad ; \quad I_{z_y} = 0$$

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \qquad i = \frac{d}{4}$$

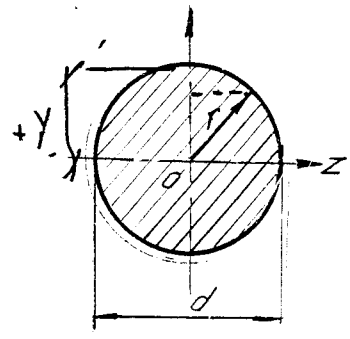


Fig.116

6.- Coroana circulară

$$S^{max} = \frac{2}{3}(R^3 - r^3)$$

$$I_{z,y} = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) \quad ; \quad I_{zy} = 0$$

$$I_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) \cong 0{,}1\,(D^4 - d^4)$$

$$i = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + r^2}$$

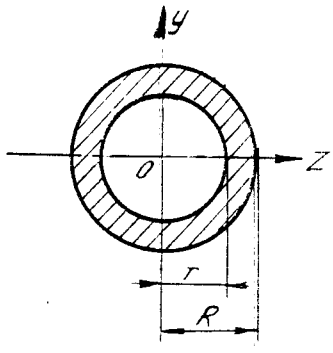


Fig.117

7.- Secțiunea triunghiulară

$$b_z = \frac{b}{h}(h - \bar{y}).$$

$$I_z = \int_0^h \bar{y}^2 \frac{b}{h}(h-\bar{y})\,d\bar{y} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{h\,b^3}{12}$$

Față de axele centrale (yoz), obținem

$$I_z = I_{\bar{z}} - A \cdot \delta^2 \qquad \frac{bh^3}{12} - \frac{bh}{2}\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_y = \frac{h\,b^3}{36}$$

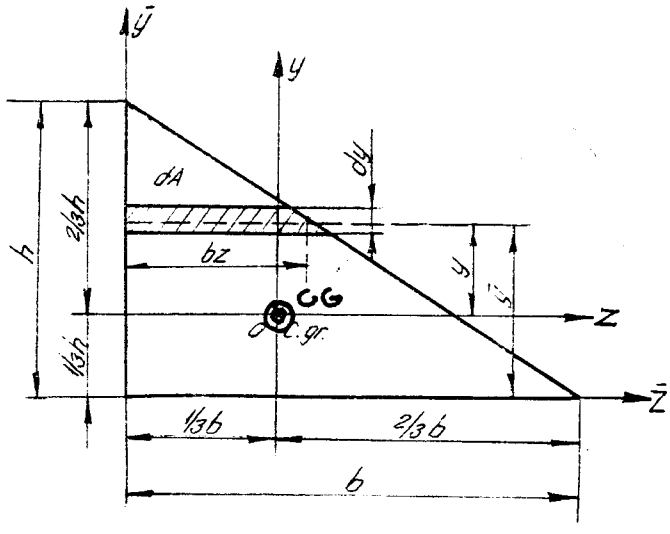


Fig.118

$$I_{zy} = \int_{(A)} z.y.dA$$

unde : $dA = b_z . dy = \frac{b}{h} \left(\frac{2}{3}h - y\right) dy$

$$z = -\left(\frac{b}{3} - \frac{b_z}{2}\right) = -\frac{b}{2h} \cdot y$$

Integrînd funcţie de o singură variabilă (y), obţinem:

$$I_{zy} = -\int_{-\frac{h}{3}}^{+\frac{2h}{3}} \frac{b}{2h} \cdot y^2 . \frac{b}{h} \left(\frac{2}{3}h - y\right) dy = -\frac{b^2 h^2}{72}$$

Momentul static maxim :

$$S_z^{max} = \int_{(A)} y.dA = \int_{o}^{+\frac{2h}{3}} y . \frac{b}{h} . \left(\frac{2}{3}h - y\right) . dy = \frac{4\, b\, h^2}{81}$$

$$S_y^{max} = \frac{4\, h\, b^2}{81}$$

Raza de inerţie

$$i_z = \sqrt{\frac{b\, h^3}{36} \times \frac{1}{\frac{b\, h}{2}}} = \frac{h}{\sqrt{18}} \cong 0{,}236\ h.$$

i_y 0,236. b.

Determinarea grafică a momentelor statice şi a momentelor de inerţie

1.- Calculul grafic al momentului static.

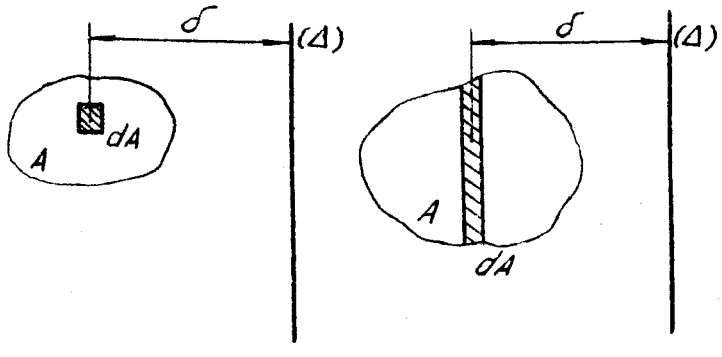


Fig. 119

Momentul statc al unei suprafeţe faţă de o axă nu depinde decît de distanţele " δ_K" ale elementelor de suprafaţă (dA_K) la axa respectivă (Δ).

$$S_\Delta = \int_{(A)} \delta_K \cdot dA_K \qquad (cm^3)$$

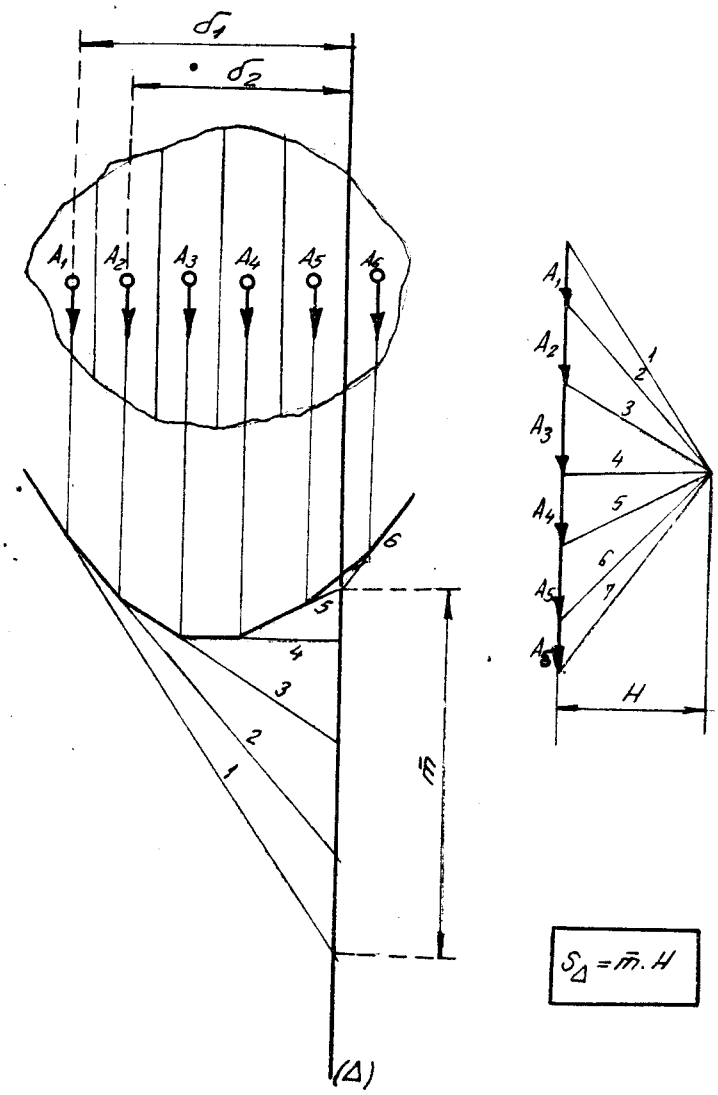


Fig. 120

Se împarte suprafaţa în fîşii finite, paralele cu axa „Δ"

Se construieşte poligonul forţelor, folosind mărimile fîşiilor $A_1, A_2 \ldots A_k$ etc. şi distanţa polară arbitrară (H).

Se construieşte poligonul funicular corespunzător.

Se prelungesc laturile extreme de poligon funicular pînă la intersecţia cu axa " Δ " (segmentul $\bar{m}$).

Rezultă,

$$S_\Delta = m \cdot H.$$

m - măsurat pe scara lungimilor

H - măsurat pe scara suprafeţelor

2.- Calculul grafic al momentului de inerţie axial (metoda lui Culman)

Se află momentele statice (ab, bc, .. etc.) ale fîşiilor de arie, paralele cu axa " Δ ".

rp

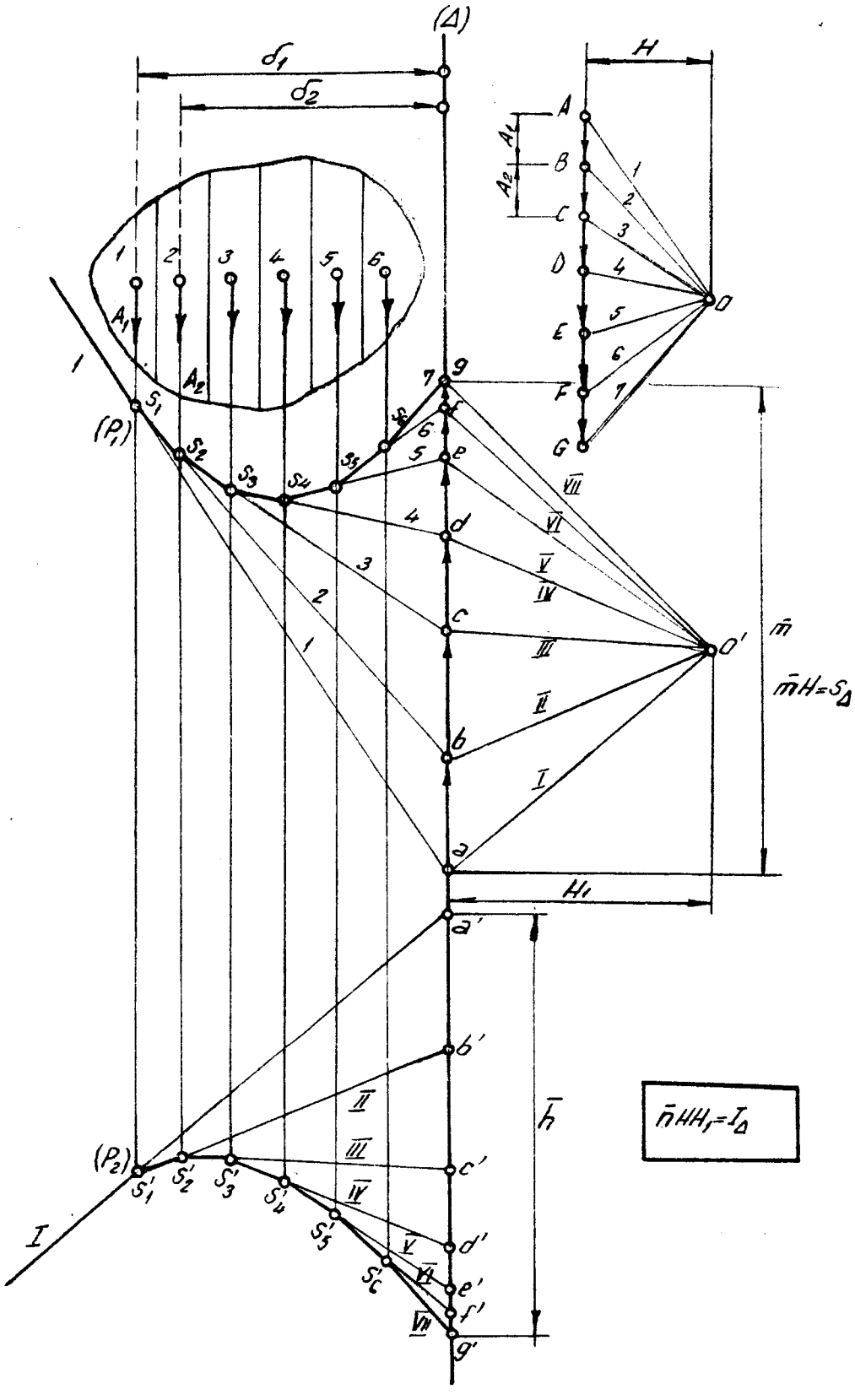


Fig. 121

Momentele statice se asimilează cu forţe ce acţionează pe direcţiile paralele cu " Δ " şi trec prin centrele de greutate ale fîşiilor.

Se construieşte poligonul de forţe (cu distanţa polară arbitrară H_1) şi poligonul funicular corespunzător.

Se prelungesc laturile extreme de poligon funicular pînă la intersecţia cu axa " Δ "; se obţine segmentul $\bar{n}$.

Rezultă,

$$I_{\Delta} = n_o \, H_o \, H_1$$

n - măsurat la scara lungimilor

H_1 - i d e m

H - măsurat la scara suprafeţelor.

2.- Calculul grafic al momentului de inerţie centrifugal faţă de axele rectangulare Δ_1, Δ_2 (fig.122).

Se calculează momentul static al suprafeţei faţă de axa " Δ_1 " : $S_{\Delta_1} = m_o \, H_o$

- Se roteşte cu 90^0 suportul segmentului $\bar{m}$ (ab, bc...)

Cu distanţa polară arbitrară H_2 se construieşte poligonul forţelor (momentul static).

Considerînd forţele acţionînd paralel cu axa " Δ_2 ", se construieşte poligonul funicular.

Prelungind laturile extreme de poligon funicular pînă la intersecţia cu axa " Δ_2 ", se obţine segmentul $\bar{p}$.

Rezultă,

$$I_{\Delta,\Delta_1} = p_o \, H_o \, H_2$$

unde: p şi H_2 se măsoară la scara lungimilor.

Metoda grafică pentru studierea variaţiei momentelor de inerţie. Cercul lui Mohr

Presupunînd cazul : $I_z > I_y$; $I_{zy} \neq 0$

Pe axa absciselor (orizontala, paralelă cu axa "z" a secţiunii) se fixează momentele de inerţie axiale. (I_z şi I_y).

In dreptul lui I_z (pct.A) se fixează cu semn schimbat, paralel cu axa ordonatelor (verticală) momentul de inerţie centrifugal ($-I_{zy}$) se obţine punctul M.

Se afla centrul cercului = C, la distanţa de origine:

$$OC = \frac{I_z + I_y}{2}$$

Se unesc punctele C şi M şi se obţine raza cercului.

$$R = CM = \sqrt{CA^2 + AM^2} = \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2}$$

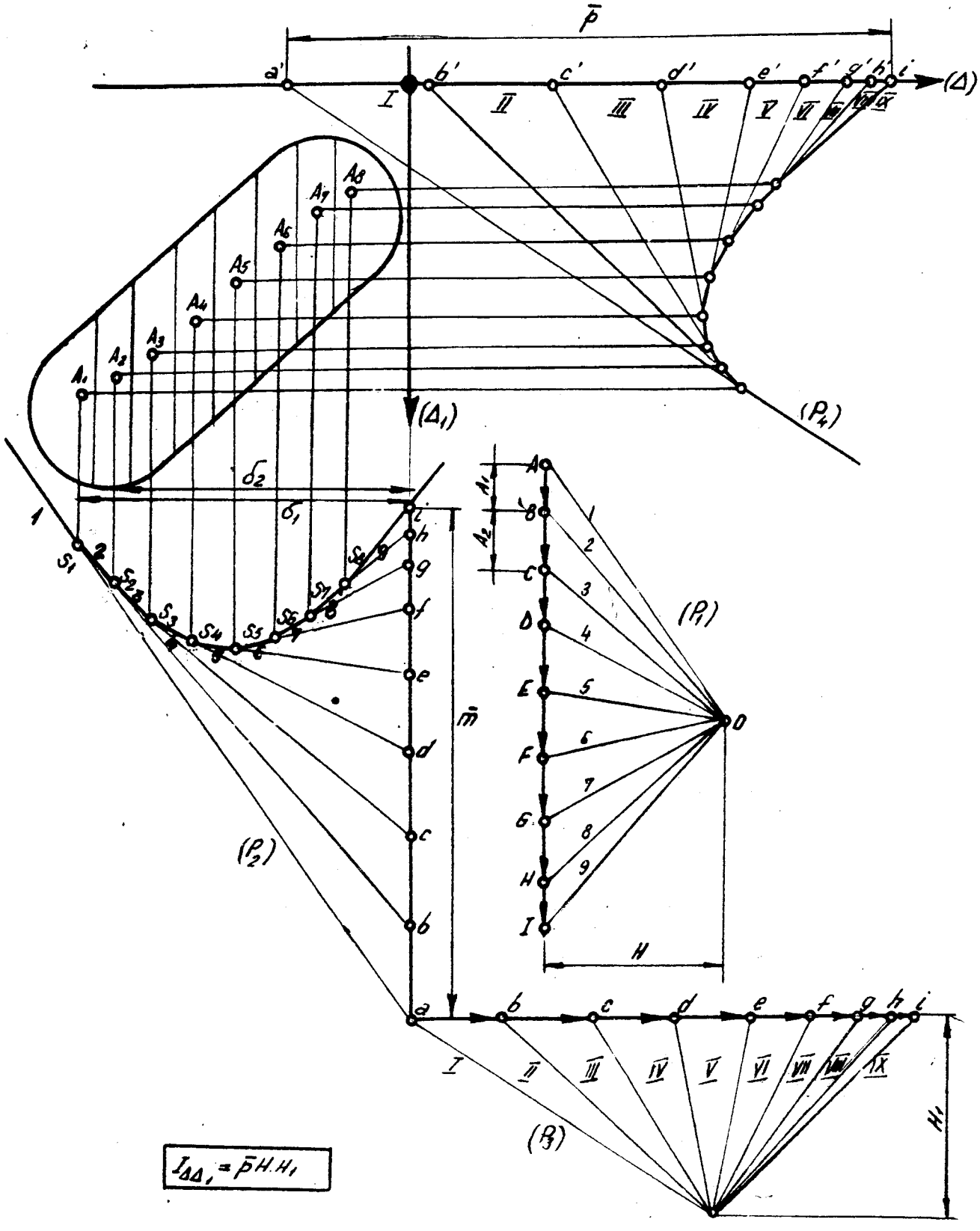


Fig. 122

Se construieşte cercul lui Mohr.

In punctele L şi K unde cercul intersectează axa abs-selor se găsesc momentele de inerţie axiale principale (I_1 şi

I_2 .

$OK = OC + R$

înlocuim,

$$I_1 = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4 I_{zy}^2}$$

$OK = OC - R$

Înlocuim,

$$I_2 = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4 I_{zy}^2}$$

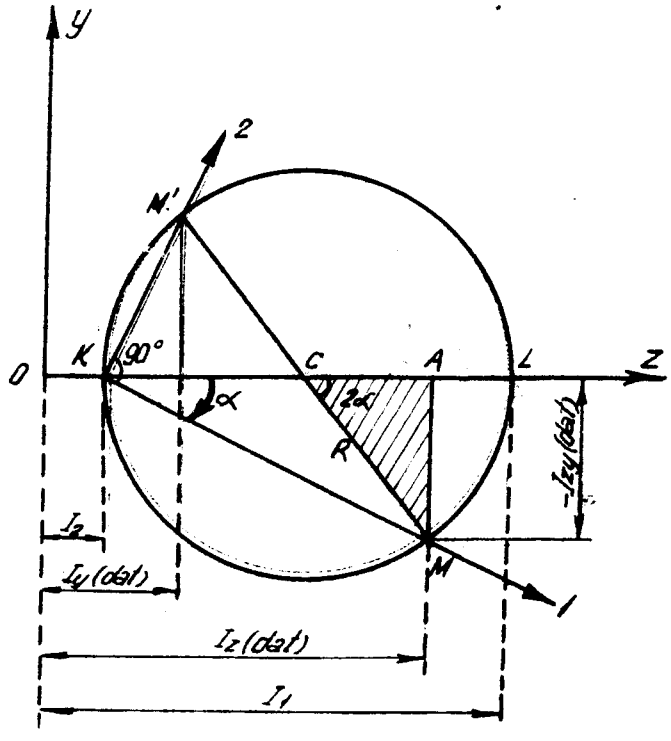
Se unește punctul K și M și se obține direcția principală I.

$$\operatorname{tg} . \widehat{ACM} = \frac{AM}{AC}$$

sau :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-I_{zy}}{\frac{I_z - I_y}{2}} = \frac{2 I_{zy}}{I_y - I_z}$$

$\alpha < 0$,



Unghiul α este negativ pentru că se măsoară de la axa "Z" pozitiv spre axa "Y" negativ (sens orar)

Sensul trigonometric este sensul pozitiv.

Prelungind raza CM obținem punctul M

Dreapta KM' definește direcția 2.

$$\widehat{MKM'} = \frac{MIM'}{2} = \frac{180^0}{2} = 90^0$$

Direcțiile principale sînt perpendiculare.

Fig. 123

4.1. Să se calculeze momentele de inerție, modulele de rezistență și razele de giratie față de axele centrale principale ale secțiunii din figură. (fig. 124)

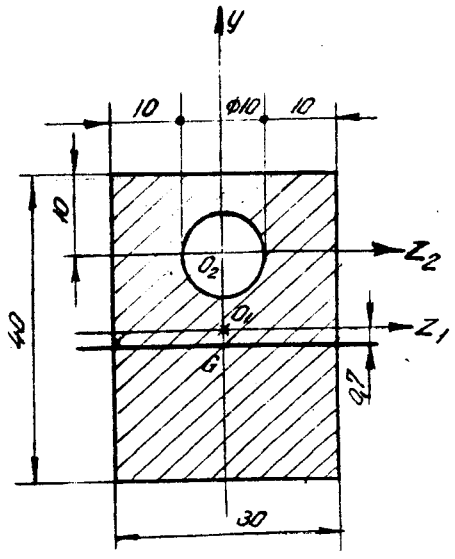


Fig. 124

Centrul de greutate (G) al secţiunii compuse (dreptunghi cu o gaură circulară) se găseşte pe axa "y" (axă de simetrie), la următoarea distanţa (y_1) faţă de axa O_1z_1:

$$y_{1,G} = \frac{-3,14 \times 5^2 \times 10}{30 \times 40 - 3,14 \times 5^2} = -$$

$$= -\frac{785}{1.121,5} \cong -0,7 \text{ cm}$$

Semnul minus ne indica că centrul de greutate (G) se află sub axa o_1z_1.

Suprafaţa :

$A = 30 \times 40 - 3,14 \times 5^2 = 1.121,50 \text{ cm}^2$

Momentele de inerţie axiale (I_z, I_y) faţa de axele centrale YGz.

Avînd o secţiune compusă, aplică formula :

$$I_\Delta = I_{\Delta 1} + A \cdot \delta^2 \quad (cm^4)$$

Unde : I_Δ - momentul de inerţie axial al figurii, faţă de axă (Δ).

I_{Δ_1} - momentul de inerţie axial al figurii, faţă de o axă (Δ_1), paralelă cu (Δ), care trece prin centrul de greutate al figurii.

δ - distanţa dintre axele (Δ) şi (Δ_1).

In cazul nostru.

$$I_z = \frac{30x40^3}{12} + 30x40x0,7^2 - \left(\frac{3,14x5^2}{4} + 3,14 \times 5^2 \times 10,7^2\right) =$$

$$= 160.000 + 588 - (492 + 9.000) \quad 151.096 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{40 \times 30^3}{12} - \frac{3,14 \times 5^4}{4} = 90.000 - 492 = 89.508 \text{ cm}^4$$

Axa "Gy" este axă de simetrie pentru ambele corpuri (dreptunghiul şi cercul).

Momentul de inerţie centrifugal: $I_{zy} = 0$, întrucît axele de simetrie ale figurii sînt şi axele principale centrale ale acesteia. Intr-adevăr integrînd succesiv în cele 4 cadrane şi ţinînd seama de semn, obţinem - evident - zero.

Deci axele YGZ sînt axe principale.

Modulele de rezistenţă

$$W_z = \frac{I_z}{Y_{max}} = \frac{151.096}{20,7} = 7.290 \text{ cm}^3$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{89.508}{15} = 5.970 \text{ cm}^3$$

Razele de giraţie

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{151.096}{1.121,50}} = 11,6 \text{ cm}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{89.508}{1.121,50}} = 8,95 \text{ cm}$$

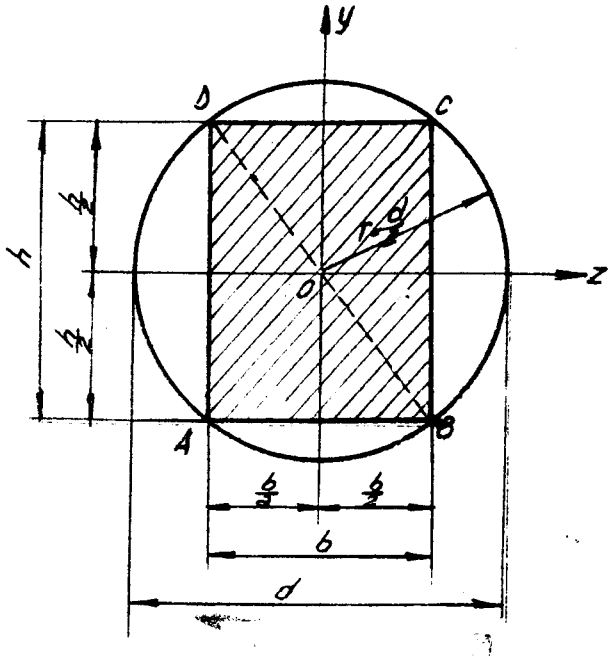


Fig. 125

4.2. Dintr-un buştean de diametrul de "d" se confecţionează o grindă dreptunghiulară /de dimensiunile "b" şi "h" variabile/.

Ce relaţia trebuie să fie între b şi h şi d pentru că grinda să aibe capacitate maximă de încărcare la incovoiere ?

(modul de rezistenţă W_z să fie maxim).

Pentru o secţiune dreptunghiulară, modulul de rezistenţă W_z are expresia :

$$W_z = \frac{b\,H^2}{6} \text{ (cm}^3\text{)}$$

Din triunghiul dreptunghic A B D, socotim relaţia :

$$d^2 = b^2 + h^2$$

De unde : $h^2 = d^2 - b^2$.

A rămas o singură variabilă: "b"

Condiţia ca W_z să fie maxim, este :

$$\frac{dW_z}{db} = \frac{1}{6}(d^2 - 3\,b^2) = 0$$

$$d^2 - 3\,b^2$$

Rezultă : $b = \frac{d}{\sqrt{3}} \cong 0,577\,d$

Introducem în relaţia de mai sus şi aflăm pe "h" :

$$h = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{3}} = d\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$h = 0,816\ d$.

Raportul optim între laturile dreptunghiului, pentru a avea un modul de rezistenţă maxim /W_z max./ este :

$$\frac{h}{b} = \frac{0,816}{0,577} \cong 1,4$$

Raportul optim între laturie grinzii şi diametrul buşteanului devine :

$$b : h : d = \sqrt{1} : \sqrt{2} : \sqrt{3}$$

Impărţim deci diametrul A C în 3 părţi egale şi în punctele de diviziune ridicăm perpendiculare care taie cercul în punctele B şi D conform figurii alăturate.

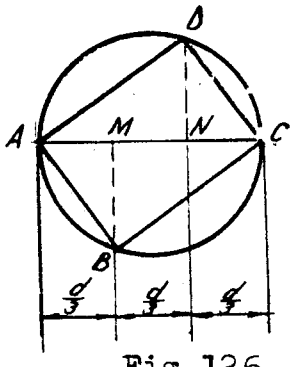


Fig.126

In triunghiul A B C, aplicăm relaţia că o catetă este medie proporţională între ipotenuză /$\overline{AC}$/ şi segmentul determinat de ea pe ipotenuză /$\overline{AM}$ sau $\overline{MC}$/

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}.\overline{AC} \ ; \ b^2 = \frac{d}{3}d; \ b \frac{1}{3} \cdot d$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{MC}.\overline{AC} \ ; \ h^2 = \frac{2\,d}{3} \cdot d \ ; \ h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot d$$

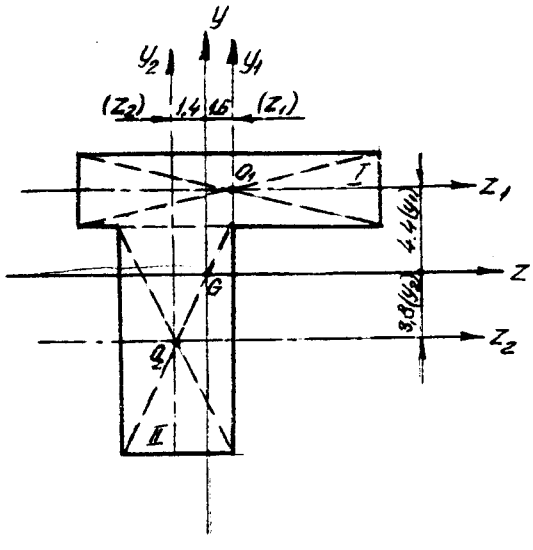


Fig. 127

4.3. Se dă o secţiune compusă (o grindă cu placa sa de beton), ca fig. 127. Să se calculeze momentele de inerţie faţă de axele centrale "yGz"

Despărţim imaginar secţiunea în două dreptunghiuri (I şi II).

Suprafaţa :

$A = 5.100 + 20.30 = 1100\ cm^2$

Poziţia centrului de greutate (G), în raport cu sistemul de preferinţă $\overline{yoz}$:

$$\bar{y}_G = \frac{500.32,5+600.15}{1100} = 22,95$$

$$\bar{z}_G = \frac{500.50+600.12}{1100} = 29,25\ cm$$

Momentele de inerţie axiale centrale le calculăm cu formula (ştiută din mecanică) ce ne dă momente de inerţie axiale faţă de axe translatate :

$$I_z = \frac{100.5^3}{12} + 500.9{,}55^2 + \frac{20.30^3}{12} + 600.7{,}95^2 = 129564 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{5.100^3}{12} + 500.20{,}73^2 + \frac{30.20^3}{12} + 600.17{,}27^2 = 830485 \text{ cm}^4$$

In calculul momentului de inerţie centrifugal total, trebue să ţinem seama că momentele de inerţie centrifugale proprii (faţă de axele de simetrie) ale celor două suprafeţe componente - sînt nule

$$I_{zy} = 500.(+9{,}55).(+20{,}73) + 600.(-7{,}95).(-17{,}27) = +98986 + 82372 = +181358 \text{ cm}^4$$

Se observă că axele "yCz" sînt axe centrale, dar nu şi principale (ptr.că $I_{zy} \neq 0$).

4.4. Să se calculeze momentele de inerţie principale şi să se traseze elipsa centrală de inerţie pentru un oţel laminat T 5. (aproximativ.)

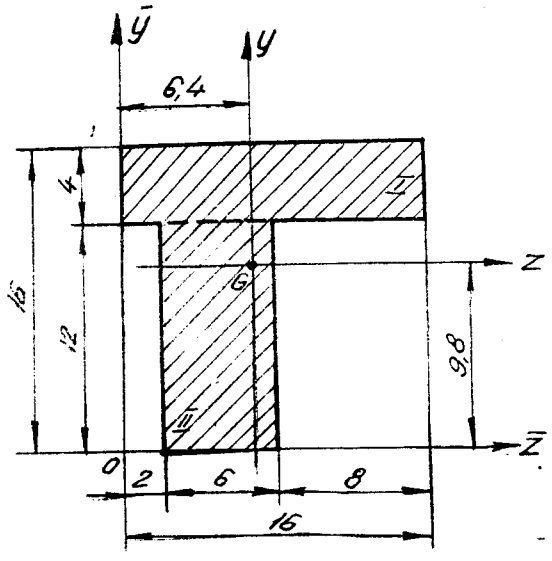


Fig. 127

Aproximăm oţelul T cu o figură regulată, compusă din două dreptunghiuri, cu caracteristicile din tabelul de mai jos :

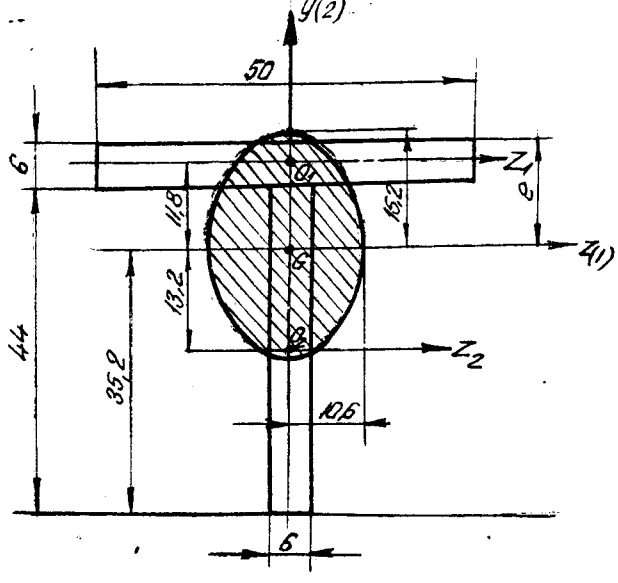


Fig. 128

Nr.crt.	Secţiunea	A/cm^2/	I_x/cm^4	I_y/cm^4/	Distanţe (cm) y	z
1	50,6 ▭	3	0,09	0,25	4,7	-
2	44,6 ▭	2,64	4,26	0,079	2,2	-

$\Sigma A_i = 5{,}64$

Observăm că aria dată în tabela pr.T: A = [illegible] cm², calculată în mod exact (ţinînd seama de racordări şi de panta de 2%) este foarte apropiată de aria dedusă mai sus (în mod aproximativ).

Figura este simetrică faţă de axa "yy"/z_G = 0/

$$\overline{y}_G = \frac{2 \cdot 4,7 + 2,64 \cdot 2,2}{5,64} = 3,52 \text{ cm}$$

e = 5,00 - 3,52 = 1,48 cm (exact: e = 1,39 cm; vezi tabela STAS 566 - 49).

Momentele de inerţie axiale.

Axele "YOZ" sînt axe centrale de inerţie.

$I_z = I_{z_1} + A \cdot y_1^2 + I_{z_2} + A \cdot [illegible]$

[illegible],09 + 3.1,18^2+4,26+2,64.1,32^2 = 13,1 cm^4 (13,1)

$I_y = I_{y_1} + I_{y_2}$ = [illegible],25 + 0,079 = [illegible],329 cm^4 (6,06)

Deoarece axa "yy" este axă de simetrie pentru ambele dreptunghiuri, rezultă că : $A \cdot z_i^2 = 0$.

Momentul de inerţie centrifugal.

$I_{zy} = \int_{(A)} zy \cdot dA$ = 0, deoarece materialul este la fel răspîndit în cadranele I + III (+), ca şi în II + IV (-)

Deci, axele "YOZ" sînt şi axe principale de inerţie

I_1 = 13,1 cm^4 I_2 = [illegible],3[illegible] cm^4

tg α = [illegible]

$i_{max} = \sqrt{\frac{I_1}{A}} = \sqrt{\frac{13,1}{5,64}} = 1,52$ cm /1,44/

$i_{min} = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{6,329}{5,64}} = 1,06$ cm /1,03/

Ecuaţia elipsei centrale principale de inerţie :

$$\frac{z^2}{1,06^2} + \frac{y^2}{1,52^2} = 1$$

Semiaxele elipsei sînt:

1,06 cm pe axa ZZ şi

1,52 cm pe axa yy (conf.fig.)

4.5. Să se calculeze momentele de inerţie, modulele de rezistenţă şi razele de giraţie principale ale unui profil

laminat I40.

Nu se va ţine seama de pantele tălpilor şi de racordări.

Extragem din tabela de laminate STAS 565/63 dimensiunile profilului I 40 şi punem pe figura de mai sus, unde am aproximat profilul cu o secţiune compusă din 3 dreptunghiuri (haşurate).

Aria totală este :

$A = 2x15,5x2,11+35,78 \times 1,44 =$

$= 65,2 + 51,3 = 11,6,5 \text{ cm}^2$

Axele "OY" şi "OZ" sînt axe de simetrie.

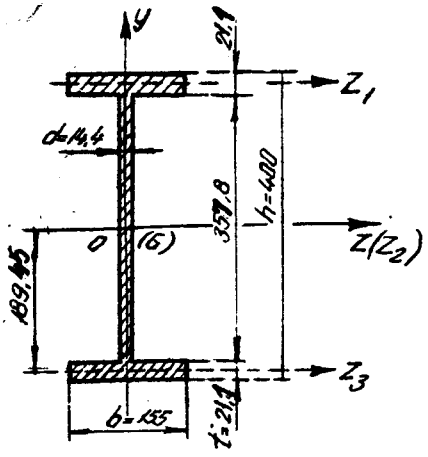


Fig. 129

Centrul de greutate (G) se află la intersecţia acestor axe.

Momentele de inerţie axiale.

$$I_z = \frac{1,44 \cdot 35,78^3}{12} + 2\left(\frac{15,5 \cdot 2,16^3}{12} + 33,4 \times 18,945^2\right) =$$

$$= 5,490 + 2\,(12.1 + 11.720) = 28,956 \text{ cm}^4$$

Se observă că momentul de inerţie axial propriu al tălpilor (12) se poate neglija (în mod curent), faţă de momentul de inerţie dat de translatarea axelor (11.720).

$$I_y = \frac{35,78 \cdot 1,44^3}{12} + 2 \cdot \frac{2,16 \cdot 15,5^3}{12} = 8,8 + 1,310 = 1.319 \text{ cm}^4$$

Se observă că momentul de inerţie axial propriu al inimii (9) se poate neglija în raport cu cel al tălpilor (1.310).

Momentul de inerţie centrifugal

$$I_{z_y} = 0$$

Deci, axele "yoz" sînt axe principale de inerţie şi $I_z \equiv I_1$; $I_y \equiv I_2$.

Modulele de rezistenţă principale.

$$W_z = \frac{28.956}{20} = 1.448 \text{ cm}^3 \qquad (W_1)$$

$$W_y = \frac{1.319}{7,75} = 170 \text{ cm}^3 \qquad (W_2)$$

Razele de giraţie principale

$$i_z = \sqrt{\frac{28.256}{116,5}} = 15,7 \text{ cm} \qquad (i_1)$$

$$i_y = \sqrt{\frac{1.319}{116,5}} = 3,36 \text{ cm} \qquad (i_2)$$

Ecuaţia elipsei de inerţie este

$$\frac{z^2}{3,36^2} + \frac{y^2}{15,7^2} = 1$$

Observăm că rezultatele obţinute pentru acest profil simplificat, sînt foarte apropiate cu cele din tabele, unde sînt calculate exact (ţinînd seama de înclinarea feţelor interioare ale profilului şi rotunjirea muchiilor).

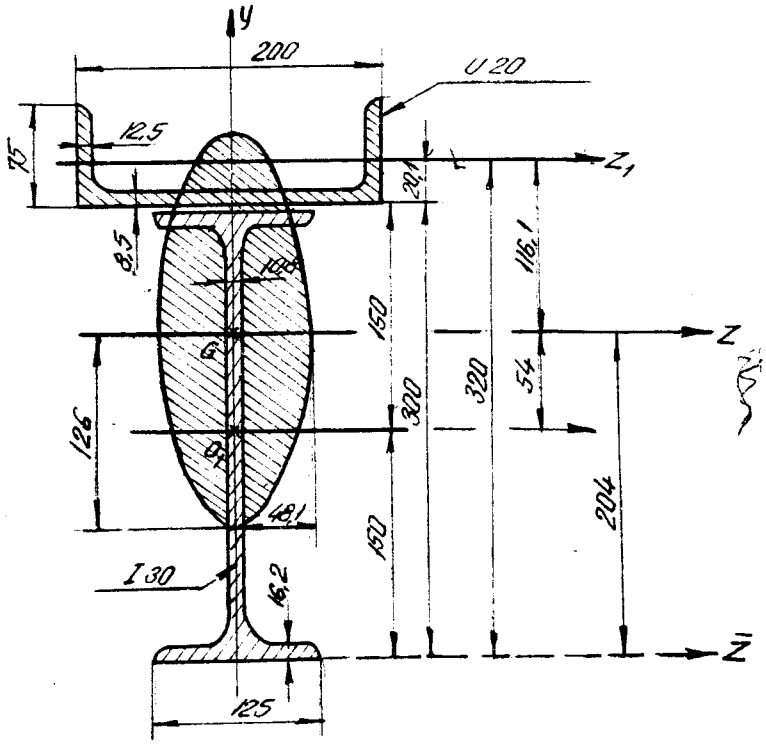


Fig. 150

4.6. Să se calculeze momentele de inerţie, modulele de rezistenţă şi elipsa de inerţie, faţă de axele centrale ale secţiunii metalice compuse din figura alăturată.

Principalele caracteristici geometrice ale profilele laminate

Profil	A (cm^2)	e (cm)	I_z (cm^4)	I_y (cm^4)
I_{30}	69,10	-	9800	451
U_{20}	32,20	2,01	148	1.910

din figura de mai sus le obţinem din tabele . (STAS 564/49 şi 565/49).

$A = 101,30 \text{ cm}^2$

Centrul de greutate (G) se află pe axa de simetrie "y", la distanţa y_G de axa de referinţă OZ .

$$\bar{y}_G = \frac{69,1 \times 15 + 32,2 \times 32,01}{101,3} = \frac{2.067}{101,3} = 20,4 \text{ cm}$$

$\bar{y}_G = 0.$

Axele YGZ sînt axe centrale de inerţie.

Momentele de inerţie axiale (I_z , I_y).

Faţă de axa "GZ" - aplicăm formula pentru momente de inerţie faţă de axe paralele :

$I_z = 9.800 + 69,1 \times 5,4^2 + 148 + 32,2 \times 11,61^2 = 12.297 \text{ cm}^4 (I_1)$

Faţă de axa "Gy" :

$I_y = I_{y1} + I_{y2} = 451 + 1.910 = 2.361 \text{ cm}^4$ (I_2)

Momentul de inerţie centrifugal (I_{zy})

$I_{zy} = 0$ (ţinînd seama de semn şi integrînd $\int_{(A)} z.y.dA$ în cele 4 cadrane)

Rezultă că axele "YGZ" sînt axe principale de inerţie, iar momentele de inerţie axiale calculate (I_z, I_y) sînt momomente principale de inerţie (I_1,I_2).

Modulele de rezistenţă principale (W_z,W_y)

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{16.297}{20,4} = 798 \text{ cm}^3$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{2.361}{10} = 236 \text{ cm}^3$$

Razele de giraţie principale

$$i_z = \sqrt{\frac{16.297}{101,30}} = 12,65 \text{ cm}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{2.361}{101,30}} = 4,81 \text{ cm}$$

Ecuaţia elipsei centrale (principale) de inerţie este:

$$\frac{z^2}{4,81^2} + \frac{y^2}{12,65^2} = 1$$

Semiaxiale elipsei sînt:

4,81 cm ... pe axa GZ

12,65 cm ... pe axa GY

(5)

4.7 Să se calculeze momentele de inerţie, modulele de rezistenţă şi razele de giraţie, faţă de axele centrale YCZ, ale secţiunii metalice compuse din 2 profile U 20, cu o platbandă 15 x 200 (sudate).

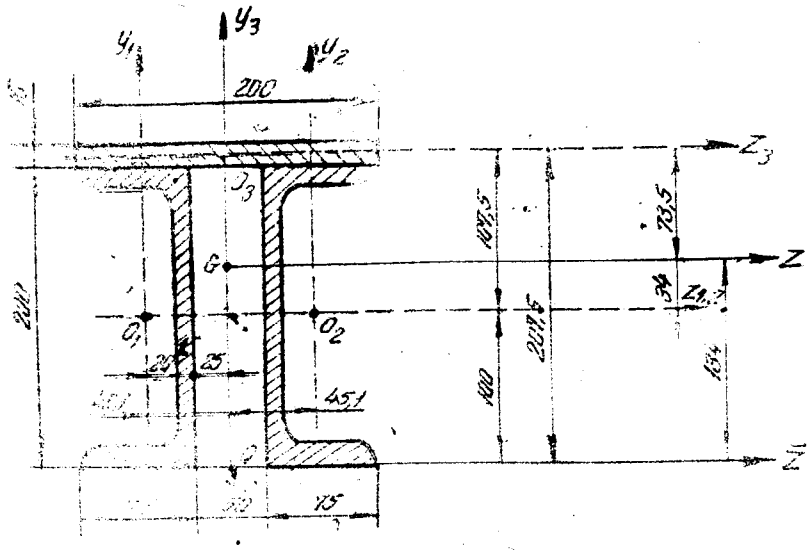


Fig. 131

Din tabele extragem caracteristicile geometrice care ne interesează.

Nr. crt.	Profil	A(cm²)	e(cm)	I_z(cm⁴)	I_y(cm⁴)	Observaţii
1,2	U 20	32,2	2,01	1.910	148	se scoate din tabele STAS 564-63
3	Ptb 200x15	30,0	-	5,6	1000	se calculează mai jos

Pentru Ptb. 200 x 15

$A_3 = 20 \times 1{,}5 = 30\ cm^2$

$$I_z = \frac{20 \times 1{,}5^3}{12} = 5{,}625\ cm^4$$

$$I_{y2} = \frac{1{,}5 \times 20^3}{12} = 1.000\ cm^4$$

Suprafaţa totală $A = \sum_{I=1}^{3} A_i$

$A = 32{,}2 + 32{,}2 + 30 = 94{,}4\ cm^4$

Coordonatele centrului de greutate (faţă de sistemul yoz):

$$\overline{y_G} = \frac{+\ 32{,}2 \times 10 + 32{,}2 \times 10 + 30 \times 20{,}75}{94{,}4} = \frac{1.266{,}5}{94{,}4} = 13{,}4\ cm$$

$\overline{z_G} = 0$ (axa "y" este axă de simetrie)

Momentele de inerţie axiale

a) faţă de axa "z"; aplicăm formula faţă de axe paralele.

$$I_z = I_{z_1} + A_1 \times d_{y1}^2 + I_{z2} + A_2 \times d_{y2}^2 + I_{z3} + A_3 \times d_{y3}^2$$

In cazul acesta :

$$I_z = 1.910 + 32,2 \times 3,4^2 + 1.910 + 32,2 \times 3,4^2 + 5,6 + 30 \times 7,35^2 =$$

$$= 6.190 \text{ cm}^4 \ (I_1)$$

b) Faţă de axa "y"

$$I_y = I_{y_1} + A_1 \times d_{z_1}^2 + A_2 \times d_{z_2}^2 + I_{y_3} + A_3 \times d_{z_3}^2 + I_{y_2}$$

In cazul acesta, axa de simetrie proprie a platbandei este chiar axa de simetrie.

Deci, $d_{z_3} = 0$

$$I_y = 148 + 32,2 \times 4,51^2 + 148 + 32,2 \times 4,51^2 + 1000 =$$

$$= 2(148 + 655) + 1000 = 1.600 + 1000 = 2,606 \text{ cm}^4 \ (I_z)$$

Momentul de inerţie centrifugal.

Se calculează cu formula :

$$I_{zy} = A_1 \times d_{y_1} \times d_{z_1} + A_2 \times d_{y_2} \times d_{z_2} = 32,2 \times (-3,4) \times (-4,51) +$$

$$+ 32,2 \times (-3,4) \times (+4,51) = 0$$

Axele "yGz" sînt axe principale de inerţie. Rezultă că şi momentele de inerţie axiale sînt momente principale de inerţie.

Modulele de rezistenţă.

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{6.190}{13.4} = 462 \text{ cm}^3$$

$$W_y = \frac{I_y}{y_{max}} = \frac{2.606}{10} = 260,6 \text{ cm}^3$$

Razele de giraţie

$$i_z = \sqrt{\frac{6.190}{94,4}} \cong 8,1 \text{ cm} \qquad i_y = \sqrt{\frac{2606}{94,4}} = 5,26 \text{ cm}$$

4.8. Să se calculeze momentele de inerţie, modulele de rezistenţă şi razele de giraţie - faţă de axele centrale ale secţiunii compuse (4 L 100 x 100 x 10), conform variantei I sau II. (fig.132)

Scoatem din tabela STAS 424-63, următoarele date geometrice, caracteristice profilului-cornier 100 x 100 x 10 (faţă de axele proprii y_1 o_1 z_1) :

$A = 19,2 \text{ cm}^2$

$e = 2,83 \text{ cm}$

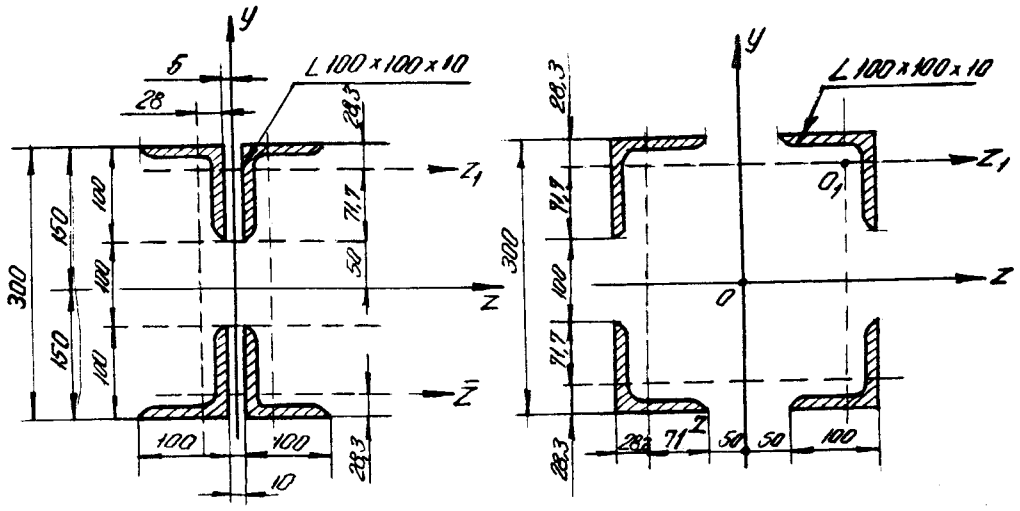


Fig. 132

$I_{z1} = I_{y1} = 179 \text{ cm}^4$

$i_{z_1} = i_{y_1} = 3{,}05 \text{ cm}$

In ambele cazuri, centrul de greutate (o) al secţiunii compuse se află la intersecţia axelor de simetrie "yoz".

Profilele sînt legate printr-un mod carecare, (un guseu între ele, în primul caz; sau plăcuţe, în cazul doi).

CAZUL I.- Momentele de inerţie (I_z, I_y, I_{zy})

Pentru calculul momentelor de inerţie axiale, folosim formula lui Steiner ($I_\Delta = I_{\Delta_1} + A \cdot \delta^2$) care ne dă relaţia dintre momentele de inerţie axiale ale unui corp, faţă de axe paralele, una dintre ele trecînd prin centrul de greutate ($I_{\Delta \cdot 1}$).

În cazul nostru

$$I_z = 4 (I_{z1} + A \cdot y^2). \quad (\text{cm}^4)$$

$$y = 5 + 7{,}17 = 12{,}17 \text{ cm}$$

$$I_z = 4 (177 + 19{,}2 \times 12{,}17^2) = 4 (177 + 2.843) = 12.080 \text{ cm}^4$$

Asemănător procedăm la calculul lui I_y.

$$I_y = 4 (I_{y1} + A \cdot z^2) \quad (\text{cm}^4)$$

$$z = 2{,}83 + 0{,}5 = 3{,}33 \text{ cm}$$

$$I_y = 4 (177 + 19{,}2 \times 3{,}33^2) = 4 (177 + 212) = 1.556 \text{ cm}^4$$

Ţinînd seama de semnului lui y şi z în cele 4 cadrane, rezultă evident :

$$I_{zy} = 0$$

Axele "yoz" sînt axe principale de inerţie ale secţiunii compuse din figură.

Modulele de rezistenţă (W_z, W_y)

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{12080}{15} = 805 \text{ cm}^3$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{1.556}{10,5} = 148 \text{ cm}^3$$

Razele de giraţie (i_z, i_y)

$$i_z = \sqrt{\frac{12,080}{76,8}} = 12,7 \text{ cm}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{1.556}{76,8}} = 4,5 \text{ cm}$$

CAZUL II. Momentele de inerţie (I_z, I_y, I_{zy})

Se observă că momentul de inerţie axial (I_z), calculat pentru secţiunea compusă din cazul I - e valabilă acum pentru ambele axe. Secţiunea lucrează la fel faţă.faţă de axa "oy" sau "oz".

Deci, $I_z = I_y = 12.080 \text{ cm}^4$

$$I_{zy} = 0$$

Modulele de rezistenţă (W_z, W_y)

Sînt egale după ambele axe.

$$W_z = W_y = 805 \text{ cm}^3$$

Razele de giraţie (i_z, i_y)

$i_z = i_y = 12,7$ cm

Se observă că în acest caz - secţiunea lucrează la fel de favorabil după ambele axe.

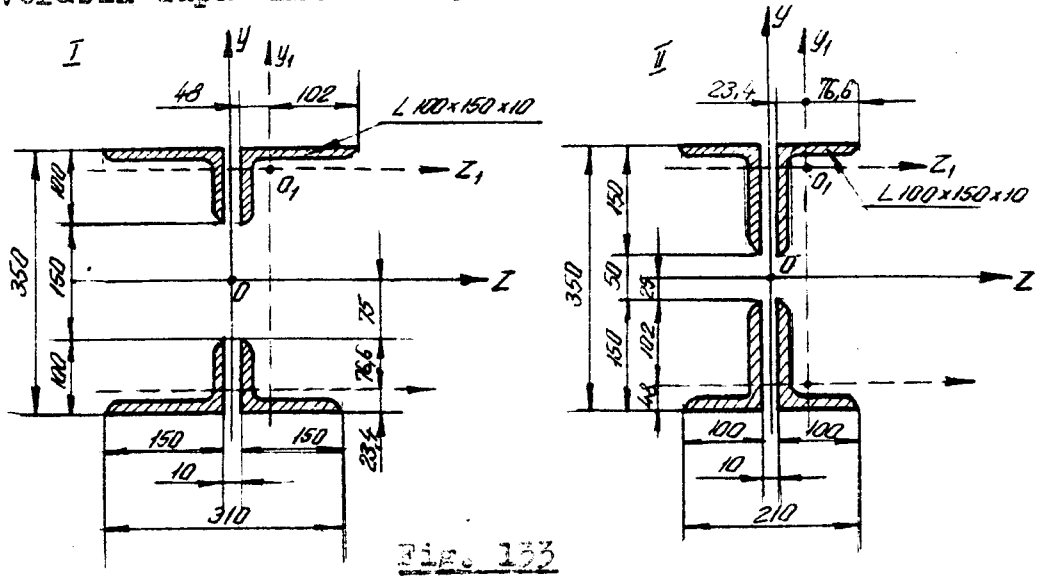


Fig. 133

4.9. Să se calculeze momentele de inerţie, modulele de rezistenţă şi razele de giraţie - faţă de axele centrale ale secţiunii compuse (4 L 100 x 150 x 10). conform variantei I sau II şi să se compare rezultatele.

Scoatem din tabela STAS 425-49, următoarele caracteristici geometrice caracteristice profilului cornier cu aripi inegale 100 x 150 x 10 (faţă de axele proprii yy şi zz) - vezi figura alăturată.

$A = 24,2 \text{ cm}^2$

$I_z = 552 \text{ cm}^4$

$I_y = 198 \text{ cm}^4$

$e_z = 4,80 \text{ cm}$

$e_y = 2,34 \text{ cm}$

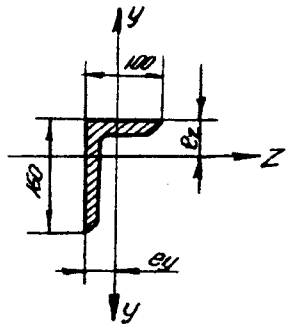


Fig. 134

Centrul de greutate (în ambele cazuri) se află punctul O - intersecţia axelor de simetrie "yoz" (axe centrale).

CAZUL I.- Momentele de inerţie

Pentru calculul momenţelor de inerţie axiale (I_z, I_y), aplicăm formula lui Steiner. Faţă de axa "z".

$$I_z = 4\ (I_{z1} + A.y^2) \quad (\text{cm}^4)$$

In cazul nostru: $I_{z_1} = 198 \text{ cm}^4$

$$y = 7,5 + 7,66 = 15,16 \text{ cm}$$

$$I_z = 4\ (198 + 24,2 \times 15,16^2) \cong 4\ (198+5.522) = 22.880 \text{ cm}^4$$

Faţă de axa "y"

$$I_y = 4\ (I_y + A.z^2) \quad (\text{cm}^4)$$

In cazul nostru :

$$I_{y1} = 552 \text{ cm}^4$$

$$z = 0,5 + 4,8 = 5,3 \text{ cm}$$

$$I_y = 4(552+24,2 \times 5,3^2) \cong 4(552 + 680) = 4.928 \text{ cm}^4$$

Momentul de inerţie centrifugal e nul : $I_{zy} = 0$

Modulele de rezistenţă

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{22.880}{17,5} = 1.306 \text{ cm}^3$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{4.928}{15,5} = 318 \text{ cm}^3$$

Razele de giraţie

$$i_z = \sqrt{\frac{22.800}{96,8}} = 15,4 \text{ cm}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{4.928}{96,8}} = [illegible]$$

CAZUL II.- Momentele de inerţie

Axiale; faţă de axa "z";

$$I_z = 4 (I_{z_1} + [illegible])$$

In exemplul de faţă, $I_{z_1} = 552 \text{ cm}^4$

$$[illegible] = 10,8 + 1,5 = 12,3 \text{ cm}$$

$$I_z = 4 (552+24,2 \times 12,3^2) = 4 (552 + 5.700) = 25.008 \text{ cm}^4$$

faţă de axa "y"

$$I_y = 4 (I_{y_1} + A_1 \cdot a^2) \text{ cm}^4$$

Ia noi : $I_{y_1} = 198 \text{ cm}^4$

$$a = [illegible] + 2,34 = 4,84 \text{ cm}$$

$$I_y = 4 (198+24,2 \times 4,84^2) = 4 (198 + 1957) = 4.572 \text{ cm}^4$$

Centrifugal : $I_{zy} = 0$

Modulele de rezistenţă

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{25.008}{17,5} = 1.429 \text{ cm}^3$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{4.572}{10,5} = 436 \text{ cm}^3$$

Razele de giraţie

$$i_z = \sqrt{\frac{25.008}{96,8}} = 15,9 \text{ cm}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{4.572}{96,8}} = 4,04 \text{ cm}$$

Observaţie: Comparînd rezultatele obţinute în cazul I şi II se observă că aşezînd cele 4 profile ca în cazul I - obţinem o secţiune compusă mai avantajoasă, cu caracteristici geometrice mai mari.

[illegible]

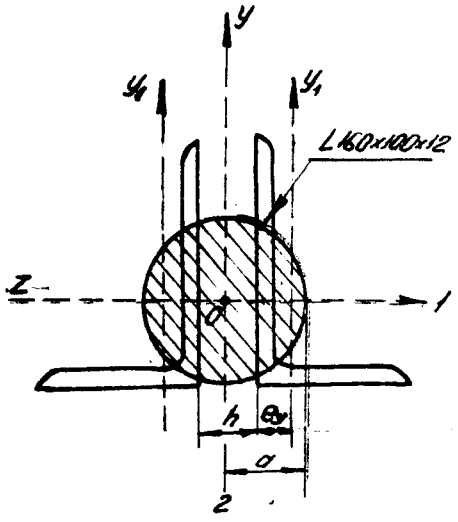


Fig. 135

cu aripi inegale 160.100.12, astfel ca momentele de inerţie principale să fie egale.

Ce devine în acest caz elipsa de inerţie ?

In tabelele date la sfîrşit STAS 424, găsim caracteristicile proprii ale profilului, date mai jos.

Nr. crt.	Profilul	$A(cm^2)$	$I_z(cm^4)$	$I_y(cm^4)$	$e_y(cm)$
1	160.100.12	30	784	239	2,36

Pentru întreaga secţiune obţinem :

$A = 2. A_1 = 2 \cdot 30 = 60 \ cm^2$

$I_1 = 2. I_z = 2.784 = 1568 \ cm^4$

$I_2 = 2/I_{y_1} + A_1 . a^2/ = 2/239 + 30.a^2/$

Momentele de inerţie principale trebuie să fie egale.

$1568 = 478 + 60 . a^2.$

$a = 4,26$ cm

Determinăm distanţa necunoscută dintre profile.

$h = 2/a - e_y/ = 2/4,26 - 2,36/ = 3,8o$ cm

Deoarece $i_z = i_y$, elipsa centrală de inerţie se transformă în cerc cu raza r :

$$r = i = \sqrt{\frac{1568}{60}} = 5,12 \text{ cm}$$

4.11. Să se afle elipsa de inerţie pentru secţiunea unui stîlp format din două fiare 2 U 22

1.- Cînd cele două profile sînt în contact (fig.alăturată)

2.- Cînd distanţa dintre ele este astfel aleasă, încît momentele de inerţie axiale centrale să fie egale : $I_z = I_y$

1.- Cele două profile U22 sînt apropiate (fig.136)

Din tabela STAS 564-63, obţinem pentru U22:

$A = 37,4 \ cm^2$

I $I_z = 2,690 \ cm^4$

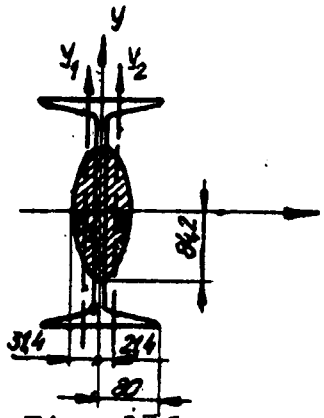


Fig. 136

$I_y = 197\ cm^4$

$e = 2,14\ cm$

Aria totală este :

$A = 2 \times 37,4 = 74,80\ cm^2$

Momentele de inerţie axiale (axele "yoz" sînt axe de simetrie)

$I_z = 2 \times 2.690 = 5.380\ cm^4$

$I_y = 2(197+37,4 \times 2,14^2) = 736\ cm^4$

Razele de inerţie :

$$i_z \sqrt{\frac{5.380}{74,80}} = 8,48\ cm$$

$$i_y \sqrt{\frac{736}{74,80}} = 3,14\ cm$$

Ecuaţia elipsei centrale de inerţie :

$$\frac{z^2}{3,14^2} + \frac{y^2}{8,48^2} = 1$$

2.- Pentru a avea momente de inerţie axiale centrale (şi principale) egale: $I_z = I_y$, trebuie ca :

$$2 \times 2.690 = 2\ (197 + 37,4 \times d^2).$$

$$d^2 = \frac{2.690 - 197}{37,4} = 66,66$$

$$d = 8,16\ cm$$

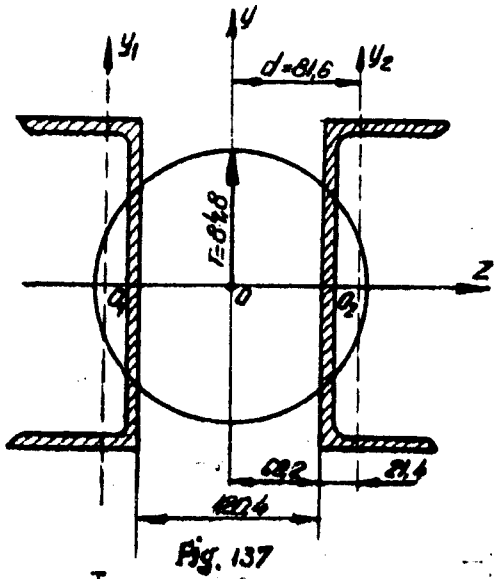


Fig. 137

Distanţa între cele două profile este :

$a = 2\ (d-e) = 2\ (8,16 - 2,14) =$

$= 2 \times 6,02 = 12,04\ cm$

Elipsa principală de inerţie devine în acest caz un cerc cu raza de giraţie (i).

$$r = i = \sqrt{\frac{5.380}{74,80}} = 8,48\ cm$$

Intr-adevăr, cu această distanţă, momentul de inerţie axial I_y rezultă :

$I_y = 2\ (197+37,4 \times 8,16^2) = 5.380\ cm^4\ (=I_z)$

Este recomandabil să folosim în practică, pentru stîlpi

comprimată centrat, o astfel de secţiune, care rezistă la fel de bine după orice direcţie, (elipsa de inerţie devine cerc).

4.12. Se dă secţiunea conform figurii de mai jos:

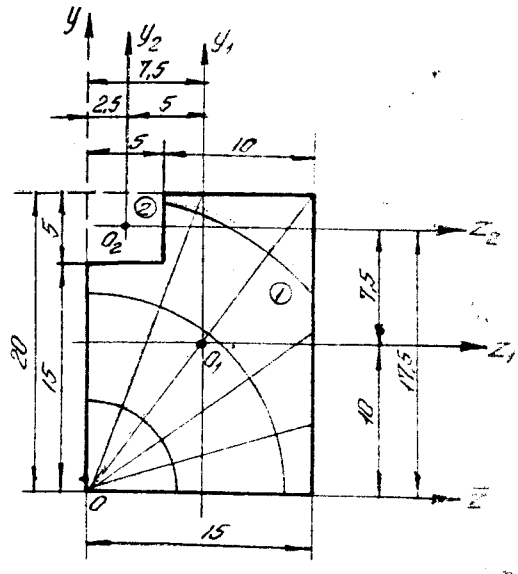


Fig. 138

Să se calculeze :

1.- Momentele de inerţie, modulele de rezistenţă şi razele de giraţie faţă de axele centrale ale secţiunii "yGz".

2.- Momentele principale de inerţie, orientarea axelor principale (grafic şi analitic), modulele principale de rezistenţă.

3.- Razele principale de giraţie şi să se trasează elipsa de inerţie faţă de axele principale.

1.- Considerăm secţiunea obţinută prin scăderea pătratului mic (2) din dreptunghiul mare (1).

Suprafaţa figurii (A) este :

$$A_1 = 15 \times 20 = 300 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 5 \times 5 = 25 \text{ cm}^2$$

$$A = 275 \text{ cm}^2$$

Centrul de greutate (G), calculat faţă de sistemul de axe $\overline{yOz}$, este definit de distanţa :

$$z_G = \frac{300 \times 10 - 25 \times 17,5}{275} = \frac{2.562,5}{275} = 9,32 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{300 \times 7,5 - 25 \times 2,5}{275} = \frac{2187,5}{275} = 7,95 \text{ cm}$$

Axele "yGz" (figura de mai jos), sînt axe centrale ale secţiunii (ele trec prin centrul de greutate al ansamblului.) Faţă de ele calculăm momentele de inerţie axiale (I_z, I_y).

Folosim formula lui Steiner :

$$I_z = \frac{15 \times 20^3}{12} + 300 \times 0,68^2 - \frac{5 \times 5^3}{12} - 25 \times 8,18^2 =$$

$$= 10.000 + 138 - 52 - 1.673 = 8.413 \text{ cm}^4$$

Similar, faţă de axa "y"

$$I_y = \frac{20 \times 15^3}{12} + 300 \times 0,45^2 - \frac{5 \times 5^3}{12} - 25 \times 5,45^2 =$$

$$= 5.625 + 61 - 52 - 743 = 4.891 \text{ cm}^4$$

Momentul de inerţie centrifugal (I_{zy}).

Folosim formula :

$$I_{zy} = I^1_{zy} + A_1 \times d^1_y \times d^1_z - (I^2_{zy} + A_2 \times d^2_y \times d^2_z).$$

Momentele de inerţie centrifugale faţă de axele proprii sînt nule.

Ţinînd seama de semn, obţinem :

$$I_{zy} = 300 \times (+0,68) \times (-0,45) - 25 \times (+8,18) \times (-5,45) =$$
$$= 92 + 1.115 = + 1.023 \text{ cm}^4$$

Modulele de rezistenţă (W_z, W_y).

Se calculează cu formula :

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} \quad ; \quad W_y = \frac{I_y}{z_{max}} \quad (\text{cm}^3)$$

In cazul de faţă :

$$W_z = \frac{8413}{10,68} = 788 \text{ cm}^3$$

$$W_y = \frac{4.891}{7,95} = 615 \text{ cm}^3$$

Razele de giraţie (i_z, i_y)

$$i_z = \sqrt{\frac{8.413}{275}} = 5,53 \text{ cm}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{4.891}{275}} = 4,21 \text{ cm}$$

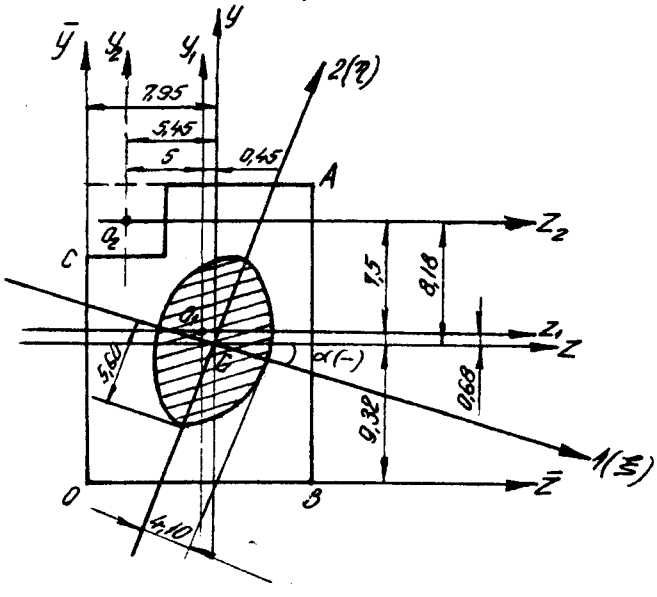


Fig. 139

2.- Calculul analitic al momentelor de inerţie principale (I_1, I_2).

Deoarece $I_{zy} \neq 0$ - rezultă că axele "yGz" nu sînt axe principale.

Rotim aceste axe cu un unghi α (vezi figura alăturată) pînă ce cădem peste axele "$\xi G \eta$"

Faţă de ele - momentul de inerţie axial este maxim (I_1) - respectiv minim (I_2); momentul de inerţie centrifugal (I_{12}) este nul.

Orientarea axelor principale ($\xi G \eta$), faţă de axele

centrale (yGz) se calculează cu formula :

$$tg\ 2\alpha = \frac{2\ I_{zy}}{I_y - I_z}$$ (pentru cazul cînd $I_z > I_y$).

$$tg\ 2\alpha = \frac{2 \times 1023}{4891 - 8413} = -0,58$$

$$2\alpha = -30^0$$

$$\alpha = -15^0$$

In acest exemplu, momentele de inerţie principale vor fi:

$$I_{1,2} = -\frac{1}{2}(8413 + 4891) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(8413 - 4891)^2 + 4.\ 1023^2} =$$

$$= 6625 \pm 500.\sqrt{16,43}.$$

$$I_1 = 8677\ cm^4$$

$$I_2 = 4627\ cm^4$$

Poziţia axelor principale de inerţie este indicată în figura de mai sus.

Verificare :

a) Suma momentelor de inerţie axiale este un invariant. Adică, $I_z + I_y = I_1 + I_2 = const.$

Deci:

$$8413 + 4891 = 8677 + 4627 = 13304\ cm^4$$

b) $(I_1 - I_z).(I_z - I_2) = I_{zy}^2$

Această egalitate rezultă din cercul lui Mohr (figura ce urmează). este o aplicare a teoremei de geometrie că într-un triunghi dreptunghic înălţimea este medie proporţională între segmentele determinate de ea pe ipotenuză.

In cazul nostru, trebuie ca :

$$(8677 - 8413).(8413 - 4627) = 1023^2$$

$$274 \cdot 3786 = 1023^2$$

1.010.000 = 1.040.000 (eroare de 3% prin calcul la riglă.)

Relaţia este satisfăcută.

Calculul grafic (cercul lui Mohr) al momentelor de inerţie principale, (valoric şi direcţia, conform figurii de mai jos).

Deoarece $I_z > I_y$, alegem axa momentelor de inerţie axiale (I_z, I_y) orizontală (paralelă cu axa "z" a secţiunii transversale).

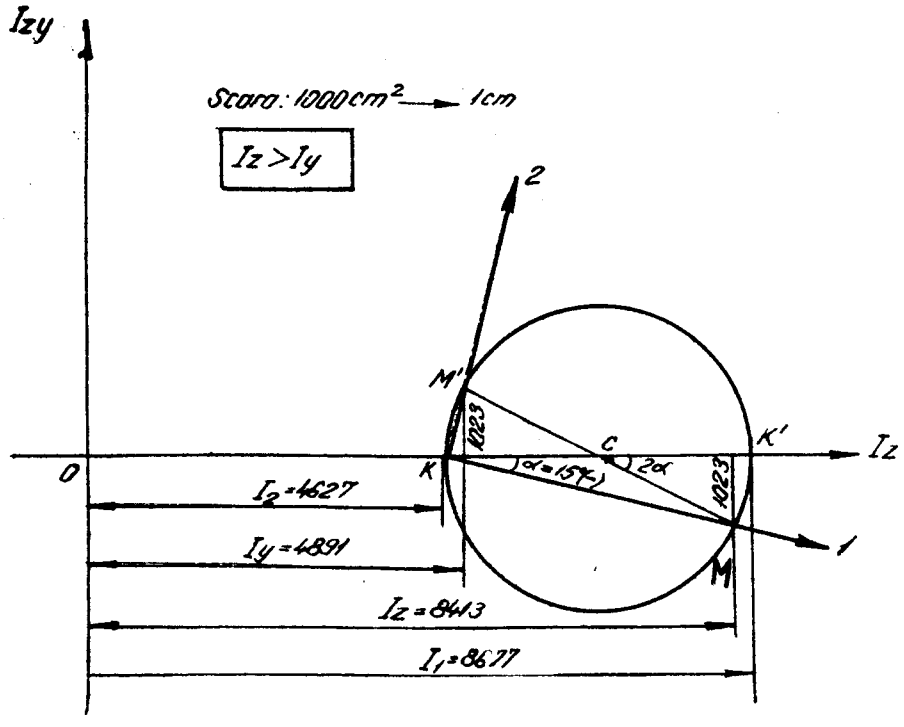


Fig. 140

Fixăm valorile cunoscute de la punctul 1 - I_z şi I_y. In capătul lui I_z fixăm pe I_{zy} cu semn schimbat; la capătul lui I_y fixăm pe I_{zy} cu semnul său. Unind extremităţile lui $-I_{zy}$ (M) şi $+I_{zy}$ (M') obţinem (la intersecţia cu axa absciselor) centrul cercului (C).

Ducem cercul, iar în punctele (K, K') unde acesta taie axa orizontală - obţinem valorile momentelor de inerţie axiale principale : maxim (I_1) şi minim (I_2).

Unind punctele K - M, obţinem direcţia principală (1); la 90° cu acesta (KM') va fi direcţia principală (2).

Se observă că $\sphericalangle \alpha$ (dintre axele "z" şi "1") este negativ (antitrigonometric); el se măsoară de la "z_+" spre "y_-"

Modulele de rezistenţă principale (W_1, W_2).

a.- Faţă de axa principală 1 (ξ).

Punctul cel mai depărtat de axa "ξ" este colţul A. Distanţa trebuie s-o calculăm funcţie de coordonatele (z_A, Y_A) cunoscute şi de unghiul α .

Pe figura ce urmează sînt trecute aceste coordonate:

A (7,05 ; 10,68) ; $\alpha = 15^\circ$

$\eta_A = GM + MN$

$GM = Y_A \cdot \cos \alpha$

$MN = Z_A \cdot \sin \alpha$

Rezultă :

η_A = 1o,68 x cos.15° + 7,o5 x sin.15° = 1o,3o + 1,83 = 12,1

Deci,

$$W_1 = \frac{I_1}{\eta_A} = \frac{8.677}{12,13} = 715 \text{ cm}^3$$

b) Faţă de axa principală 2 (η)

Punctele cele mai depărtate de axa " η " este colţul 2 sau C - egal depărtate. (cazul particular).

Distanţa ξ_B funcţie de coordonatele punctului şi unghiul α, este :

B (7,o5; - 9,32); $\alpha = 15°$

ξ_B = PR + RB (figura următcare)

PR = Y_B sin α

RB = Z_B cos α

Rezultă

ξ_B = 9,32 x sin.15° + 7,o5 x cos.15° = 2,41 + 6,80 =
= 9,21 cm

Deci,

$$W_2 = \frac{I_2}{\xi_B} = \frac{4.627}{9,21} = 50\ 2 \text{ cm}^3$$

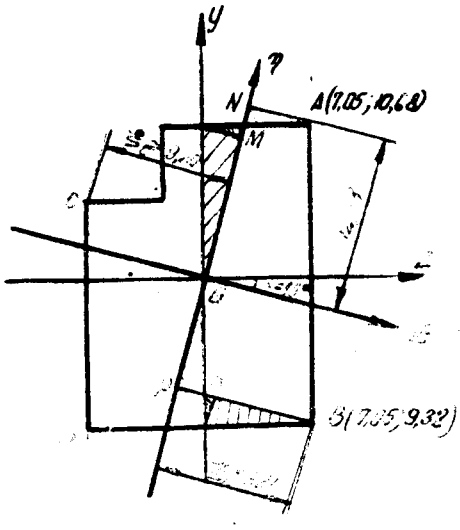


Fig. 141

3.- Razele principale de giraţie

Faţă de axele principale (ξ, G, η), razele de giraţie se calculează cu formula :

$$i = \sqrt{\frac{I_1}{A}} \qquad (i_1)$$

$$i = \sqrt{\frac{I_2}{A}} \qquad (i_2)$$

In cazul nostru :

$$i = \sqrt{\frac{8.677}{275}} = 5,6 \text{ cm}$$

$$i = \sqrt{\frac{4.627}{275}} = 4,1 \text{ cm}$$

Ecuaţia elipsei principale de inerţie este

$$\frac{\xi^2}{4,1^2} + \frac{\eta^2}{5,6^2} = 1$$

Semiaxele elipsei sînt :

4,1o cm pe axa " ξ "

5,6o cm pe axa " η " (vezi fig. 139

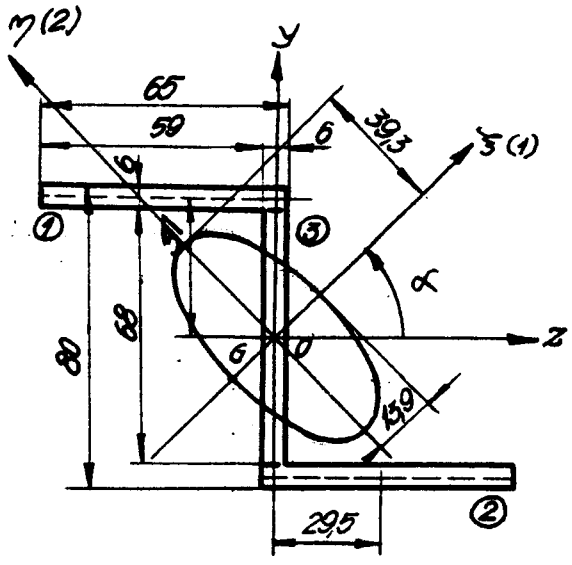


Fig. 142

4.13. Pentru o pană de acoperiş metalică avînd secţiunea în formă de Z din figură, să se găsească poziţia axelor principale de inerţie, să se calculeze momentele principale de inerţie, şi să se traseze elipsa de inerţie.

Putem considera secţiunea compusă din 3 dreptunghiuri.

Suprafaţa sa totala este :

$A=2(0,6x6,5)+6,8x0,6= 11,88\ cm^2$

Figura este simetrică faţa de axele "yy" şi "zz" deci centrul O (de simetrie) coincide cu centrul G (de greutate).

Calculul analitic al momentelor de inerţie axiale (I_z, I_y) şi centrifugal (I_{zy}) faţă de sistemul de axe centrale "yoz".

$$I_z = 2\left(\frac{6,5x0,6^3}{12} + 0,6 \times 6,5x3,7^2\right) + \frac{0,6x6,8^3}{12} = 2 \times 53,51 + 15,72 = 122,74\ cm^4$$

$$I_y = 2\left(\frac{0,6x6,5^3}{12} + 0,6 \times 6,5x2,95^2\right) + \frac{6,8x0,6^3}{12} = 2 \times 47,67 + 0,122 = 95,46\ cm^4$$

Momentul de inerţie centrifugal

$$I_{zy} = 0,6x6,5 \times (+3,7) \times (-2,95) + 0,6x6,5 \times (-3,7) \times (+2,95) =$$
$$= -2 \times 42,57 = -85,14\ cm^4$$

Era de aşteptat ca momentul de inerţie centrifugal să iasă negativ, deoarece materialul e distribuit în special în cadranele II şi IV (faţă de yGz).

Calculul analitic al momentelor de inerţie principale.

$$I_{1,2}=\frac{1}{2}(122,74+95,46) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(122,74-95,46)^2 + 4 \times 85,14^2} =$$
$$= 109,10 \pm 0,5\sqrt{743 + 28.980} =$$
$$= 109,10 \pm 50.\sqrt{2,97} = 109,10 \pm 50 \times 1,72 = 109 \pm 86.$$

$I_1 = 195,10\ cm^4$

$I_2 = 23,10\ cm^4$

Se verifică condiţia ca suma momentelor de inerţie axiale este un invariant. Adică :

$$I_z + I_y = I_1 + I_2$$

$122,74 + 95,46 = 195,10 + 23,10 = 218,20\ cm^4$

Direcţia axelor principale de inerţie

$$tg\ 2\alpha = \frac{-2 \times 85,14}{95,46-122,74} \cong 6,25$$

$$2\alpha \cong 81^0$$

$\alpha = 40^0\ 30'$ (direcţia axei 1, faţă de axa z măsurată în sens trigonometric).

Calculul grafic (cercul lui Mohr) al momentelor şi direcţiilor principale de inerţie.

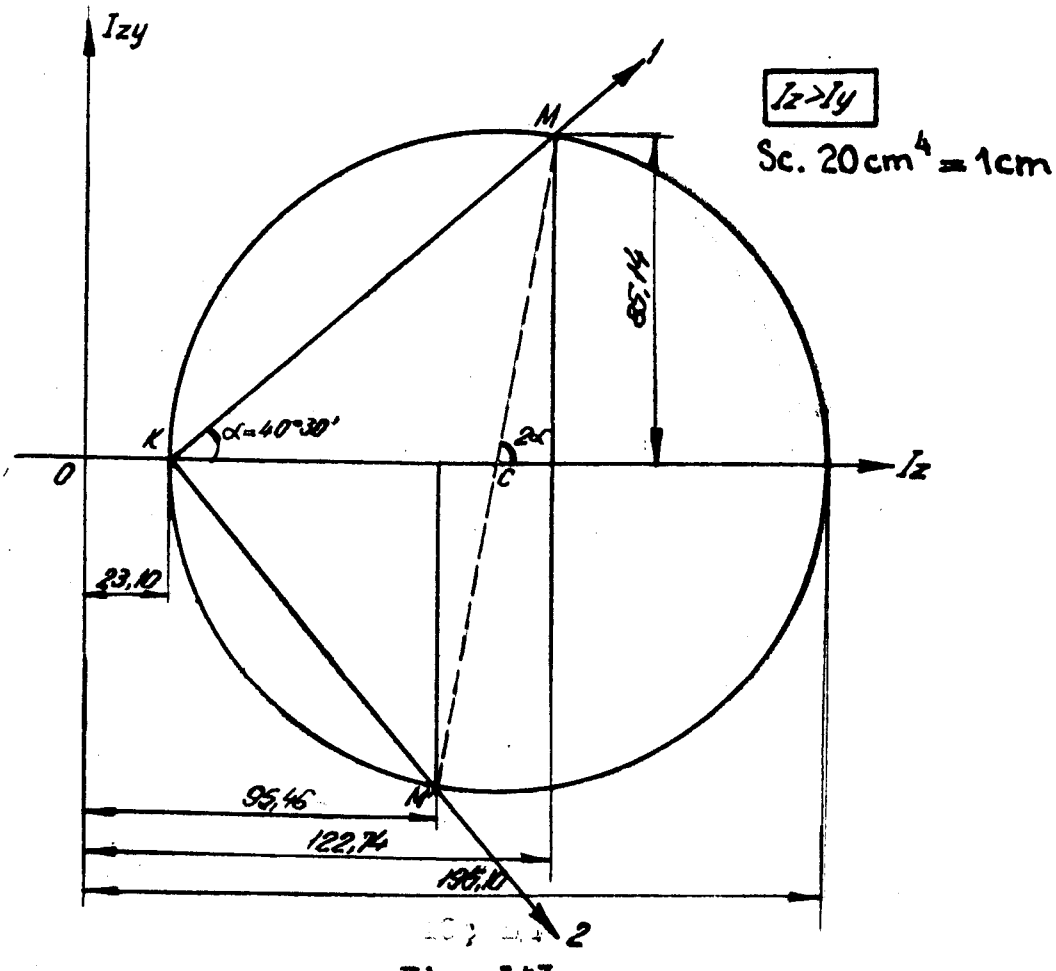


Fig. 143

Deoarece $I_z > I_y$ alegem axa orizontală, axa momentelor de inerţie axiale.

Razele de giraţie principale

Se măsoară în raport cu axele principale

$$i_1 = \sqrt{\frac{195,10}{11,88}} = 3,93\ cm$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{23,10}{11,88}} = 1,39 \text{ cm}$$

Dacă notăm axa principală 1 cu "ξ" şi axa principală 2 cu "η" (sistemul folosit în tabele), ecuaţia elipsei devine :

$$\frac{\xi^2}{1,39^2} + \frac{\eta^2}{3,93^2} = 1$$

Unde semiaxele elipsei de inerţie sînt :

1,39 cm - pe axa "ξ" (1)

3,93 cm - pe axa "η" (2)

4.14. Se dă un profil cornier cu aripi neegale : 140 x 90 x 10.

Neglijînd racordările şi pantele, să se determine :

1. Momentele de inerţie în raport cu axele "YGZ", care trec prin centrul de greutate al secţiunii.

2. Poziţia axelor principale şi valoarea momentelor de inerţie principale (analitic şi grafic)

3. Elipsa centrală de inerţie.

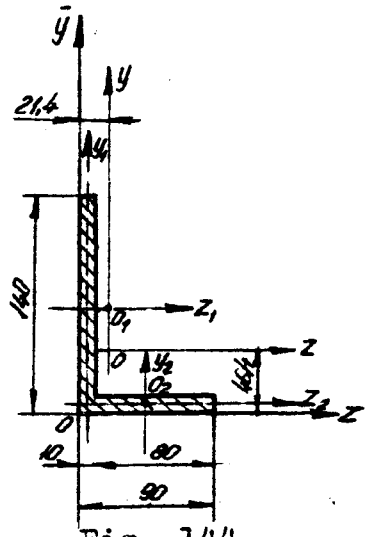


Fig. 144

1.- Secţiunea o considerăm compusă din două dreptunghiuri.

Ariile şi momentele de inerţie proprii sînt trecute în tabelul de mai jos.

Nr. crt.	Secţiunea	A(cm^2)	I_z(cm^4)	I_y(cm^4)	Distanţa (cm) $\bar{z}$	Distanţa (cm) $\bar{y}$
1	140.10	14	228,5	1	0,5	7
2	80.10	8	0,7	42,7	5	0,5

$$\Sigma A_i = 22 \text{ cm}^2$$

Poziţia centrului de greutate al profilului.

$$\bar{y}_G = \frac{14.7 + 8.0,5}{22} = 4,64 \text{ cm } (4,58)$$

$$\bar{z}_G = \frac{14.0,5 + 8,5}{22} = 2,14 \text{ cm } (2,12)$$

[illegible] valorile obținute prin metoda [illegible], care se găsesc gata calculate în tabela STAS 425-[illegible].

Momentele de inerție axiale.

[illegible] $= 444,3$ cm^4

+ [illegible] $= 146,7$ cm^4

[illegible] $= 1 \cdot /-1,14 = -0,57 +$

$+ 8 \cdot /+2,14 - 5/^2 = 2,8 + 10,1 = 12,9$ cm^4

/145/.

Momentul de inerție centrifugal.

Va rezulta negativ, deoarece majoritatea materialului se găsește în cadranele II și IV.

$$I_{zy} = 14 \cdot /-1,04/ \cdot /+2,36/ + 8 \cdot /+2,86/ \cdot /-4,14/ =$$

$$= - /54,2 + 94,8/ = - 149 \text{ cm}^4.$$

2.- Calculul momentelor și direcțiilor principale de inerție.

a). Analitic

$$I_{1,2} = \frac{444,3 + 146,7}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(444,3 - 146,7)^2 + 4 \cdot (-149)^2} =$$

$$= 295,5 \pm 210,6.$$

$I_1 = I_\xi = 306,1$ cm^4 /504/

$I_2 = I_\eta = 84,9$ cm^4 /85,5/

Suma momentelor de inerție axiale este un invariant.

$$I_1 + I_2 = I_z + I_y = 591 \text{ cm}^4$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot I_{zy}}{I_y - I_z} \quad \text{(avem cazul : } I_z > I_y\text{)}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2 \cdot 149}{-297,6} = + 1$$

$$2\alpha = + 45^0$$

$\alpha = + 22^0\ 30'$ (măsurat în sens trigonometric, de la z_+ spre y_+).

$\operatorname{tg} \alpha = 0,413 \cdot /0,409/$

Se observă că valorile găsite cu metoda aproximativă [illegible] cu exactă (în paranteză), sînt f.apropiate, diferențele [illegible] fiind limitele admisibile. (3 ÷ 5%).

b. Grafic

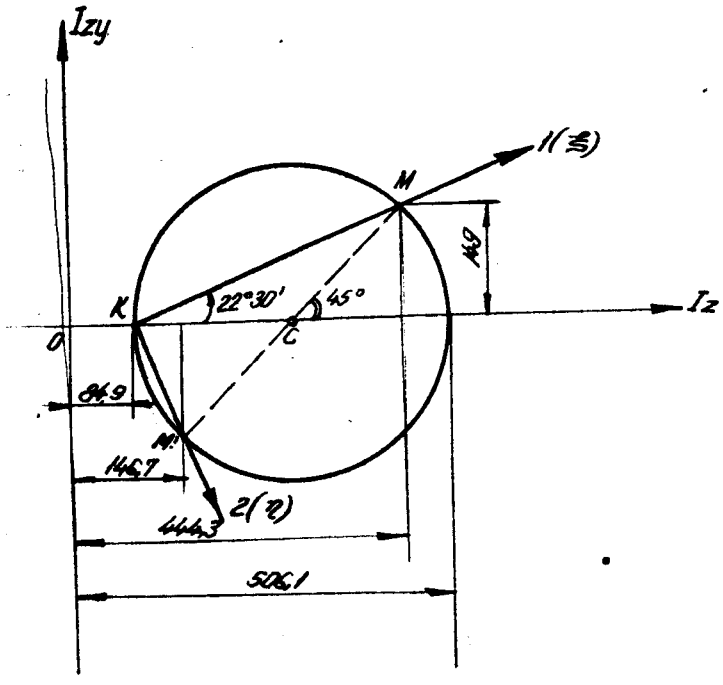


Fig. 145

2. Pentru găsirea ecuației elipsei de inerție, se calculează razele de inerție (semiaxele elipsei).

$$i_1 = i_\xi = \sqrt{\frac{I_1}{\Sigma A_i}} = \sqrt{\frac{506,1}{22}} = 4,795 \text{ cm } /4,77/$$

$$i_2 = i_\eta = \sqrt{\frac{I_2}{\Sigma A_i}} = \sqrt{\frac{84,9}{22}} = 1,966 \text{ cm } /1,96/$$

Elipsa centrală de inerție are ecuația :

$$\frac{\xi^2}{3,86} + \frac{\eta^2}{23} = 1 \quad \text{(fig. 146)}$$

Observație: Practic, în calcul, se vor folosi valorile din tabele. (STAS).

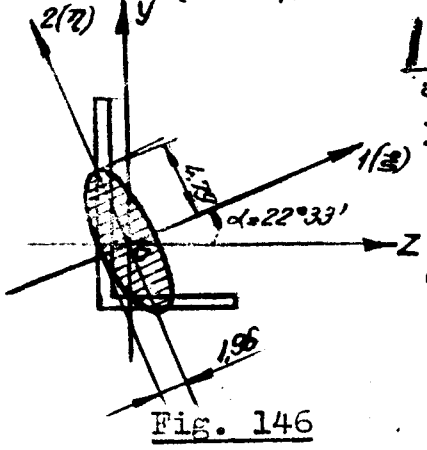


Fig. 146

4.15. Se dă secțiunea compusă metalică, alcătuită dintr-un profil U∠6, cornier L∠5 x 80 x 10 și o tablă groasă 170 x 12.

Să se afle :

1. Momentele și direcțiile principale de inerție, (grafic și analitic).

2. Razele de girație principale și să se traseze elipsa de inerție.

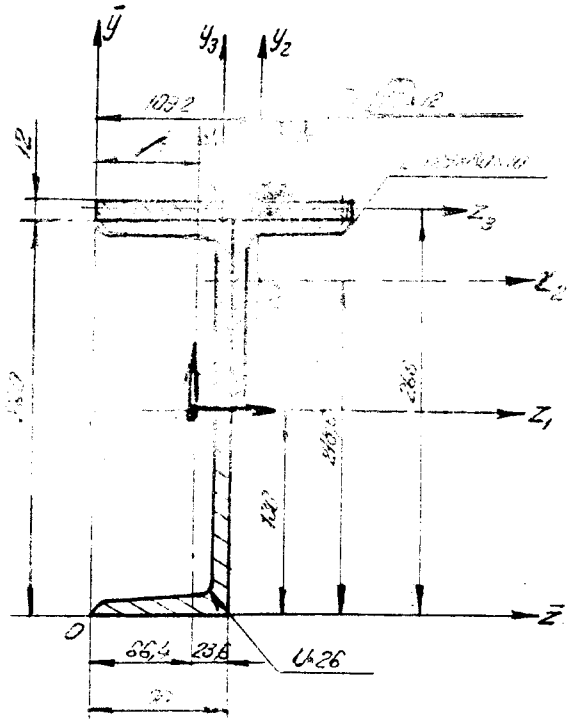


Fig. 147

1. Pentru a simplica calculul, se întocmeşte următorul tablou cu caracteristicile proprii ale fiecărei secţiuni:

Nr. crt.	Profilul	$A(cm^2)$	$I_z(cm^4)$	$I_y(cm^4)$	e(cm)	Observaţii
1	U 26	48,3	4,820	317	2,36	vezi tabela STAS 564-63
2	L 125x80x10	19,7	312	100	$\frac{4,14}{1,92}$	vezi tabela STAS 425-62
3	Dg.170x12	20,4	2,43	490	-	Se calculează mai jos.

$$\Sigma A_i = 88,4$$

Caracteristicile geometrice proprii ale secţiunii Nr.3

$$A = 17,1,2 = 20,4\ cm^2$$

$$I_z = \frac{17 \times 1,2^3}{12} = 2,45\ cm^4$$

$$I_y = \frac{1,2 \times 17^3}{12} = 491\ cm^4$$

Poziţia centrului de greutate faţă de sistemul de axe $\bar{Y}\bar{Z}$.

$$Y_G = \frac{48,3 \cdot 13 + 19,7 \cdot 21,86 + 20,4 \cdot 28,6}{88,4} = 18,1\ cm$$

$$Z_G = \frac{48,3 \cdot 6,64 + 19,7 \cdot 10,92 + 20,4 \cdot 8,5}{88,4} = 8,03\ cm$$

Calculul momentelor de inerţie axiale.

$$I_z = 4.820 + 48,3\,/18,1 - 13/^2 +$$

$$312 + 19,7\,/18,1 - 21,86/^2 +$$

$$+ 2,45 + 20,4\,/18,1 - 26,6/^2 = 6,080 + 589 +$$

$$+ 1.467 = 8136 \text{ cm}^4.$$

$$I_y = 317 + 48,3\,/8,03 - 6,64/^2 +$$

$$+ 100 + 19,7\,/8,03 - 10,92/^2 +$$

$$490 + 20,4\,/8,03 - 8,5/^2 = 410 + 265 + 494 = 1.169 \text{ cm}^4$$

Calculul momentului de inerţie centrifugal.

$$I_{zy} = 48,3./-5,16/-1,39/+19,7./+3,76/./+2,89/+20,4/8,5/./+0,47/=$$

$$= 343 + 214 + 82 = + 639 \text{ cm}^4.$$

Calculul momentelor şi direcţiile principale de inerţie.

a). Analitic.

$$I_{1,2} = \frac{8136 + 1169}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(8136 - 1169)^2 + 4.639^2} =$$

$$= 4652,5 \pm 3541,5.$$

$$I_1 = 8.194 \text{ cm}^4 \qquad I_2 = 1.111 \text{ cm}^4$$

Să verificăm relaţia :

$$I_z + I_y = I_1 + I_2 = 9.305 \text{ cm}^4.$$

Deoarece I_z I_y, direcţia principală de inerţie se verifică cu relaţia :

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2 I_{zy}}{I_y - I_z} = - \frac{2639}{6967} = - 0,183$$

$$2\alpha = - 10^\circ 30'$$

$$\alpha = - 5^\circ 15' \text{ (măsurat de la axa } Z_1 \text{ spre } Y_2 \text{ în sens antitrigonometric).}$$

b). Grafic.

Calculul grafic se face folosind metoda cercului lui Mohr. (fig.148).

2. Razele de giraţie principale (raportate la axele principale de inerţie), sînt :

$$I_1 = \sqrt{\frac{I_1}{\Sigma A_i}} = \sqrt{\frac{8194}{88,4}} = 9,61 \text{ cm.}$$

$$I_2 = \sqrt{\frac{I_2}{\Sigma A_i}} = \sqrt{\frac{1111}{88,4}} = 3,54 \text{ cm.}$$

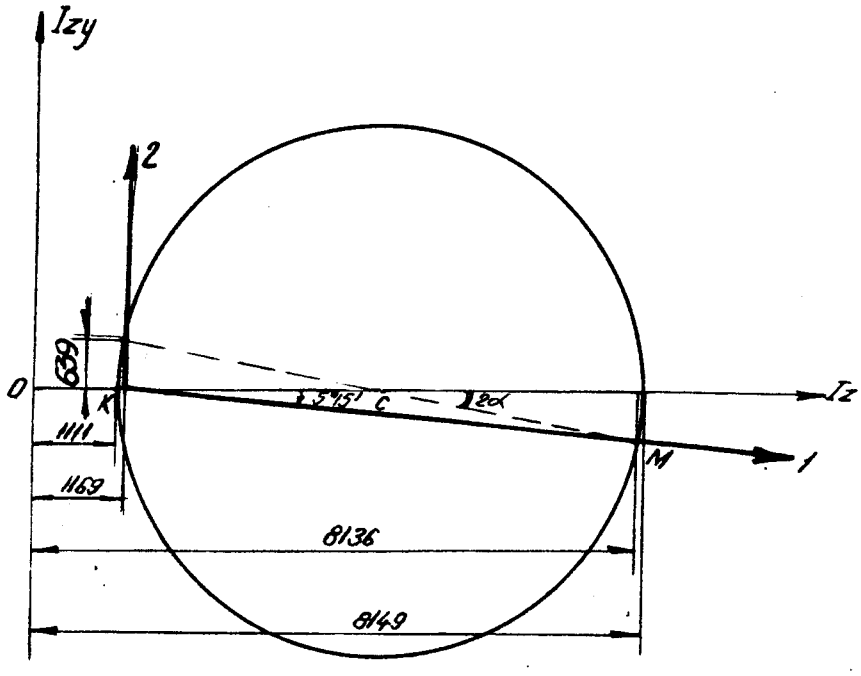


Fig. 148

Ecuaţia elipsei centrale de inerţie :

$$\frac{\xi^2}{12,55} + \frac{\eta^2}{92,6} = 1$$

Semiaxele elipsei sînt :

9,61 cm pe axa principală " η "
3,54 cm pe axa principală " ξ "

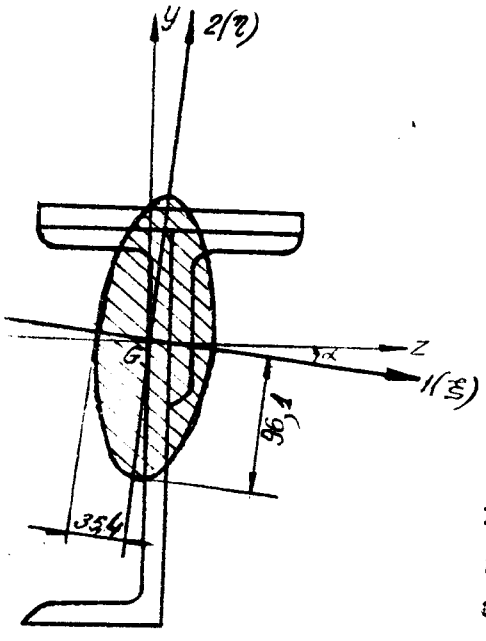


Fig.149

4.16. Sa se gaseasca axele şi momentele principale de inerţie şi să se construiască elipsa de inerţie a secţiunii de forma trapezoidică din figura. (fig.150).

Considerînd trapezul dintr-un dreptunghiu (30x48) şi un triunghi (30x48) dreptunghic

Suprafaţa

$$A = 30x48 + \frac{1}{2} \times 30x48 = 1.440 + 720 = 2,160 \text{ cm}^2$$

Centrul de greutate, faţă de sistemul de axe " $y_1 O z_1$ " :

$$Y_o = \frac{-720x8}{2.160} = -2,7 \text{ cm}$$

$$Z_o = \frac{-720x25}{2.160} = -8,3 \text{ cm}$$

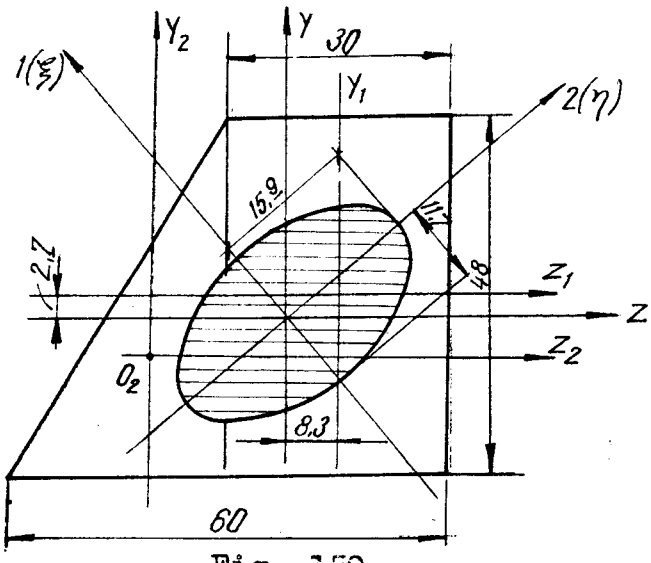


Fig. 150

Momentele de inerţie axiale :

$$I_z = \frac{30 \times 48^3}{12} + 1.440 \times 2,7^2 + \frac{30 \times 48^3}{36} + 720 \times 5,3^2 = 399.300 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{48 \times 30^3}{12} + 1.440 \times 8,3^2 + \frac{48 \times 30^3}{36} + 720 \times 16,7^2 = 444.000 \text{ cm}^4$$

Momentul de inerţie centrifugal :

$$I_{zy} = 1.440 \times (-8,3) \times (-2,7) + \frac{30^2 \times 48^2}{72} + 720 \times (-5,3) \times (-16,7) =$$
$$= + 124.800 \text{ cm}^4$$

Momente de inerţie principale (analitic) :

$$I_{1,2}(\text{dm}^4) = \frac{39,93+44,40}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(39,93-44,40)^2 + 4 \times 12,48^2} =$$
$$= 42,17 \pm 12,70$$

$$I_1 = 42,17 + 12,70 = 54,87 \text{ dm}^4 = 548.700 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = 42,17 - 12,70 = 29,47 \text{ dm}^4 = 294.700 \text{ cm}^2$$

Suma momentelor de inerţie axiale este invariat.

$$I_z + I_y = I_1 + I_2$$

$$39,93 + 44,40 = 54,87 + 29,47 = 84,34$$

Momentul de inerţie polar

$$I_p = I_z + I_y = 843,300 \text{ cm}^4$$

Direcţiile principale de inerţie (analitic).

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2 I_{zy}}{I_z - I_z} = \frac{+ 2 \times 12,48}{33,93-44,40} = - 5,57 \quad (I_y > I_z)$$

$2\alpha = -80^0$

$\alpha = -40^0$ (născut de la axa "y"$_+$ spre "z"$_-$)

Rezolvarea grafică (cercul lui Mohr).

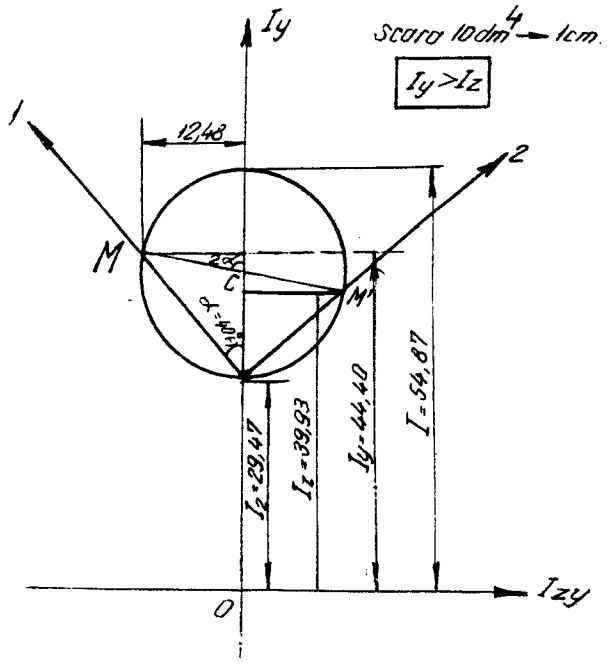


Fig.151

Razele de giraţie faţă de axele principale ($\eta O \xi$)

$$i_{max} = \sqrt{\frac{548,700}{2.160}} = 15,9 \text{ cm}$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{294,700}{2.160}} = 11,7 \text{ cm}$$

Ecuaţia elipsei centrale de inerţie este :

$$\frac{\xi^2}{i^2_{min}} + \frac{\eta^2}{i^2_{max}} = 1$$

Elipsa de inerţie are ca semiaxe :

11,7 cm (i_{min}) pe axa pr.1(ξ)

15,9 xm (i_{max}) pe axa pr.2(η)

(vezi figura iniţială)

4.17. Se dă secţiunea unui stîlp metalic, compusă din două profile L 100.150.10 - aşezate în fluture, ca în figura de mai jos. Se cere să se determine.

A. Momentele de inerţie, modulele de rezistenţă şi razele de giraţie faţă de axele centrale "yoz".

B. Poziţia axelor principale de inerţie "102" şi valoarea momentelor de inerţie principale - I_1 şi I_2 (grafic şi analitic); de asemenea să se traseze elipsa principală de inerţie.

C. Ce se întîmplă în cazul cînd orientăm profilele-cornoer ca în poziţia II (cu aripa lungă dealungul axei "ZZ"). (fig.152).

A. Găsim centrul de greutate - O, al secţiunii compuse, (alegînd axele Z_2, respectiv y_1 - ca axe de referinţă).

$$y_o = \frac{A.(2e_z + 1)}{2\,A} = (e_z + 0,5) \text{ cm}$$

$$z_o = \frac{A.(2e_y + 1)}{2\,A} = (e_y + 0,5) \text{ cm}$$

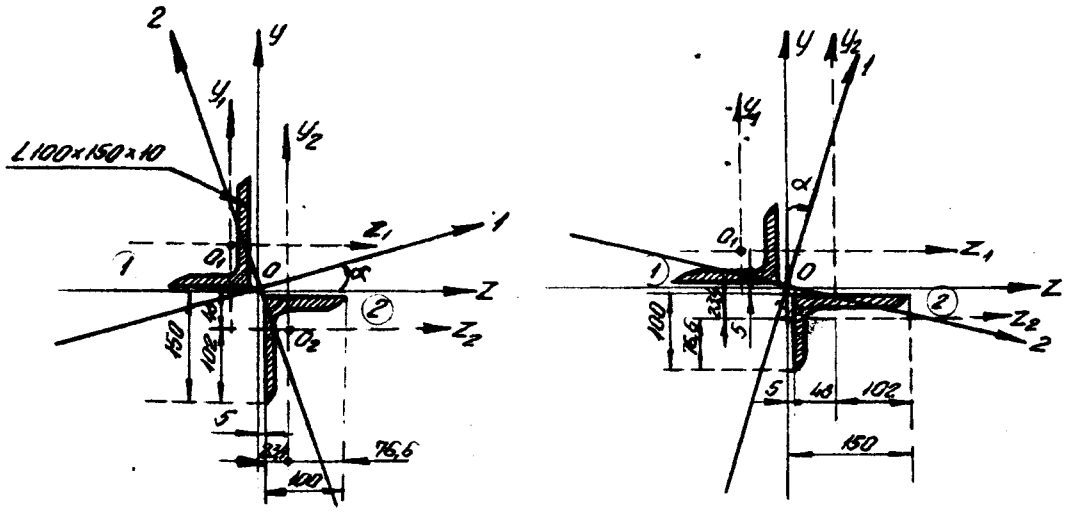


Fig. 152

Unde $e_z = 4,80$ cm. şi $e_y = 2,34$ cm, reprezintă execentricităţile centrului de greutate propriu al unui profil - cornier 100.150.10.

Momentele de inerţie axiale :

$$I_z = 2\ (I_{z_1} + A.y_0^2) = 2\ (552+24,2.5,3^2) = 2464\ cm^4$$

$$I_y = 2\ (I_{y_1} + A.z_0^2) = 2\ (19[illegible]+24,2.2,84^2) = 788\ cm^4$$

Momentul de inerţie centrifugal :

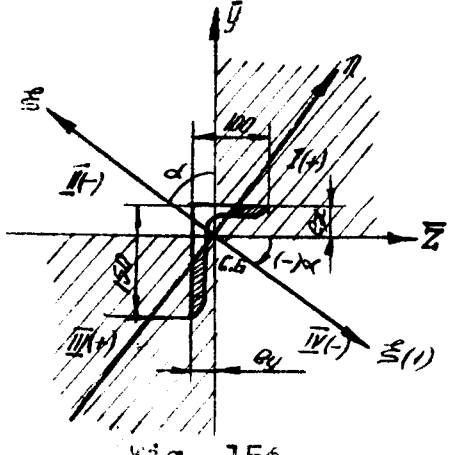


Fig. 152

Momentul de inerţie centrifugal :

$$I_{z_y} = 2\ (I_{z_1 y_1} - A.\ Y_0.\ Z_0)$$

Pentru a găsi momentul de inerţie propriu centrifugal (al unei corniere - $I_{z_1}\ I_{y_1}$) faţă de sistem de axe $\overline{ycz}$ (figura alăturată) putem folosi două metode.

Din STAS 425-49 (vezi anexa) scoatem valoarea : $tg\ \alpha = 0,442$

Unghiul α (între direcţia Z şi ξ) este antitrigonometric deci negativ. Rezultă :

$$\alpha = -\ 24^0 \longrightarrow tg\ 2\alpha = -\ 1,11$$

Din relaţia care ne dă direcţia axelor principale de inerţie :

$$tg\ 2\alpha = \frac{2\ I_{zy}}{I_z - I_y},$$

scoatem necunoscuta : $I_{\overline{zy}}$

Deci,

$$I_{zy} = \frac{1}{2} \cdot (-1,11) \cdot (198-552) = + 196 \text{ cm}^2$$

Din figură reiese că momentul de inerţie propriu centrifugal al cornierei trebuie să fie pozitiv, pentru mai mult material se află cadranele I şi III (pozitiv, haşurat) - decît în cadranul II (negativ).

2. Aplicăm cornierei formula care ne dă valoarea momentelor de inerţie principale; cunoaştem toţi termenii (ni-i dă STAS-ul) - cu excepţia lui $I_{\overline{zy}}$.

De exemplu, pentru I_1:

$$I_1 = \frac{I_{\overline{z}} + I_{\overline{y}}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_{\overline{z}} - I_{\overline{y}})^2 + 4 \cdot I^2_{\overline{zy}}}$$

$$637 = \frac{552 + 198}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(552-198)^2 + 4 \cdot I^2_{\overline{zy}}}$$; Rezultă: $I_{\overline{zy}} = 195 \text{ cm}^4$

Revenim la momentul de inerţie centrifugal al secţiunii compuse :

$$I_{zy} = 2\ (195 - 24,2 \cdot 5,3 \cdot 2,84) = - 338 \text{ cm}^4$$

Era de aşteptat să iasă negativ, deoarece cornierea (1) este în cadranul II şi cornierea (2) în cadranul IV, ambele negative. (vezi figura iniţiala).

Modulele de rezistenţă :

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{2464}{15,5} = 159 \text{ cm}^3$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{788}{10,5} = 75 \text{ cm}^3$$

Razele de giraţie centrale (I_y, i_z) :

$$i_y = \sqrt{\frac{2464}{48,4}} = 7,15 \text{ cm}; \qquad I_z = \sqrt{\frac{788}{48,4}} = 4,02 \text{ cm}$$

B. Calculul analitic

$$I_{1,2} = \frac{2464+788}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(2464-788)^2 + 4 \cdot 338^2} = 1626 \pm 902$$

$I_1 = 2528 \text{ cm}^4$; $I_2 = 724 \text{ cm}^4$

Se observă că suma momentelor de inerţie axiale este un invariant:

$$I_z + I_y = I_1 + I_2 = 3252 \text{ cm}^4$$

Direcţia principală de inerţie 1 :

$$tg\ 2\alpha = \frac{-2,338}{788 - 2464} = + 0,404$$

$2\alpha = + 22^0 \rightarrow \alpha = 11^0$ (născut în sens trigonometric, de la axa "z"$_+$)

Calculul grafic (cercul lui Mohr) se vede din figura ce urmează

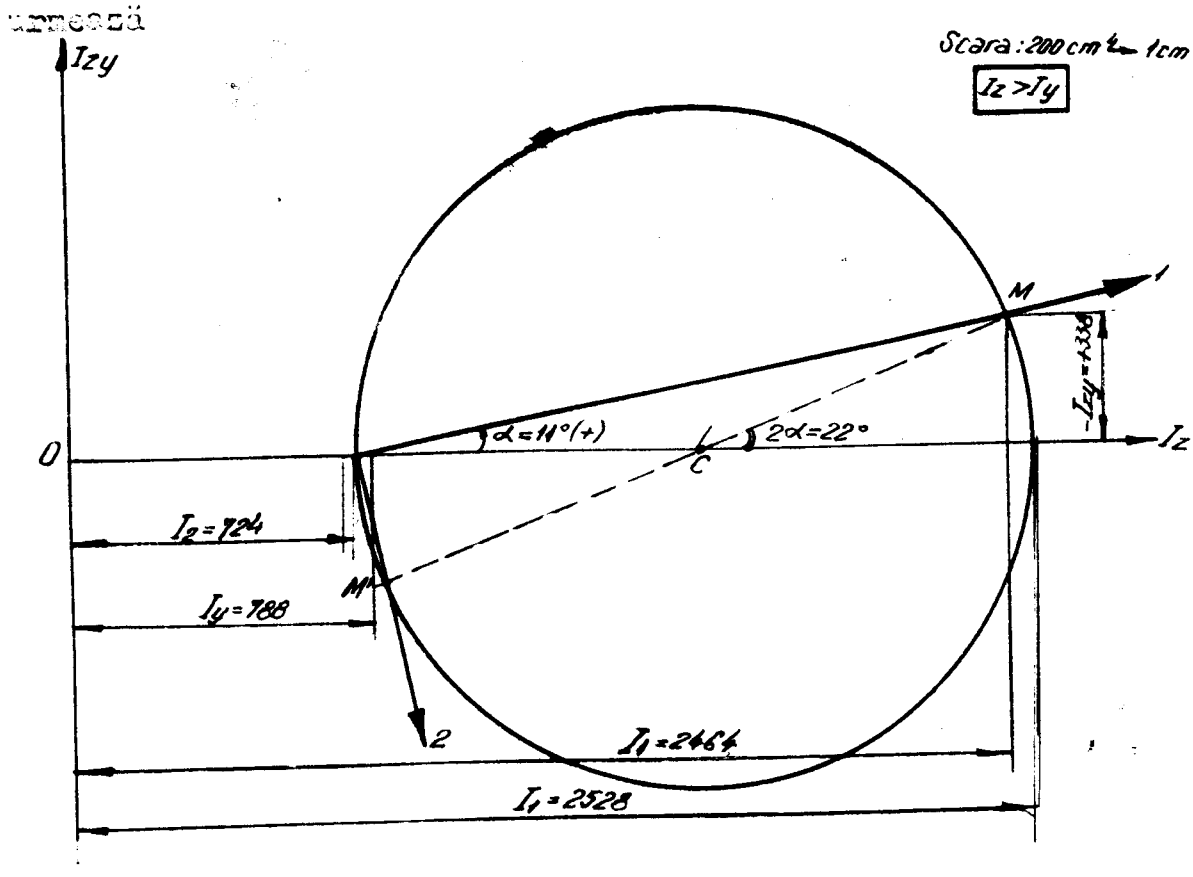


Fig. 154

Elipsa principală de inerţie are ecuaţia :

$$\frac{\xi^2}{i_2^2} + \frac{\eta^2}{i_1^2} = 1$$

unde i_1 şi i_2 sînt razele de inerţie principale :

$$i_1 = \sqrt{\frac{2528}{48,4}} = 7,1 \text{ cm} ;$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{724}{48,4}} = 3,87 \text{ cm}$$

Aceştea devin şi semiaxele elipsei de ecuaţie :

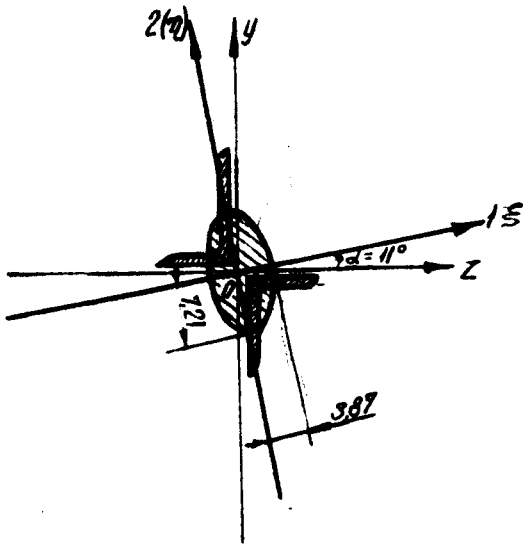


Fig. 155

$$\frac{\xi^2}{3,87^2} + \frac{\eta^2}{7,21^2} = 1$$

C. În cazul cînd orientăm cornierele în fluture, cu aripa lungă de-a lungul axei "ZZ" (ca în figura inițială, II) - poziție obținută prin rabatarea fig.1, față de "yy" (axele rămîn fixe) și rotind figura cu 90^0.

Deci:

I_z (caz II) = I_y (caz I) = 788 cm^4

Similar :

I_y (caz II) = 2464 cm^4

I_{zy} = - 338 cm^4 (negativ, deoarece materialul e dispus tot în cadranele II și IV).

W_z = 75 cm^3 ; W_y = 159 cm^3

i_z = 4,02 cm ; i_y = 7,15 cm

Observație : Momentul de inerție mai mare, ($I_z > I_y$, caz I - respectiv $I_y > I_z$, caz II) se obține pentru poziția în care centrele de greutate al elementelor componente (O_1 și O_2) sînt mai depărtate de axa respectivă.

Direcția și momentele principale de inerție (analitic):

I_1 = 2528 cm^4 ; I_2 = 724 cm^4

$tg\ 2\alpha$ = + 0,404 → α = + 11° (de la "y_+" spre "z_+")

Rezolvarea grafică: alegem axa verticală ca axă a momentelor de inerție axială (I_y, I_z) și orizontală ca axă a momentelor de inerție centrifugală (I_{zy}) - pentru că avem cazul : $I_y > I_z$. (figura 156).

Elipsa principală de inerție se raportează la noile axe (102) și se obține o elipsă cu aceleași dimensiuni ca în primul caz, dar rotită față de aceasta cu unghiul (90 + 2 α)°.

4.18 Să se calculeze analitic și grafic momentele și direcțiile principale de inerție ale secțiunii compuse din 2 profile U 20 - așezate ca în figura 157.

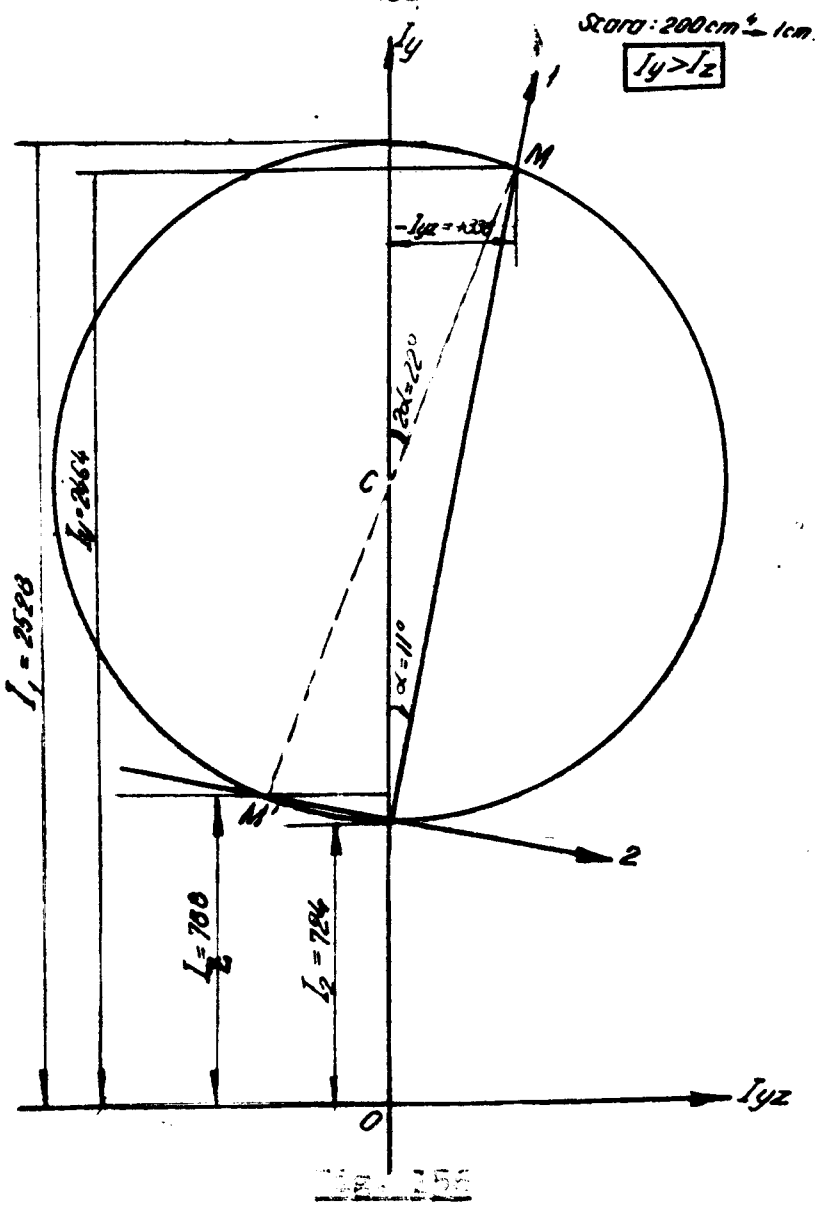


Fig. 156

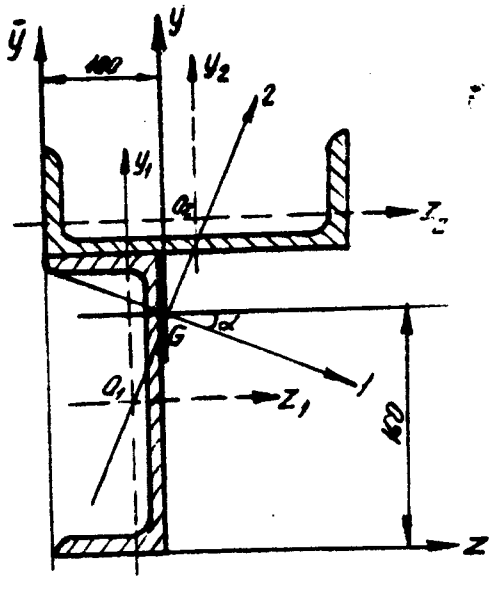


Fig. 157

...eloșim tabela de profile ...inate ...3), scoatem caracteris...le geometrice ale profilelor ..., de care avem nevoie

Profilul	$A cm^2$	e (cm)	$i_z (cm^4)$	$I_y (cm^4)$
U 20 (1)	32,2	2,01	1,910	148
U 20 (2)	32,2	2,01	148	1.910

- Aria totala este :

$$\sum_{i=1}^{2} A_i = 32,2 = 32,2 = 64,4 \text{ cm}^2$$

Poziţia centrului de greutate (G), faţă de axele $\overline{yoz}$.

$$Y_{c.G.} = \frac{32,2 \times 10 + 32,2 \times 22,01}{64,4} = \frac{1.030,7}{64,4} = 16 \text{ cm}$$

$$Z_{c.G} = \frac{32,2 \times 5,49 + 32,2 \times 10,0}{64,4} = \frac{498}{64,4} \cong 7,7 \text{ cm (figura de mai sus)}$$

Momentele de inerţie axiale centrale.

a) Faţă de axa "GZ"

$$I_{z_1} = 1.910 + 32,2 \times 6^2 + 148 + 32,2 \times 6,01^2 = 4.380 \text{ cm}^4$$

b) faţa de axa "Gy"

$$I_{y_1} = 148 + 32,2 \times 2,21^2 + 1.910 + 32,2 \times 2,3^2 = 2.385 \text{ cm}^4$$

Momentul de inerţie centrifugal.

$$I_{zy} = 32,2 \times (-6) \times (-2,21) + 32,2 \times (+6,01) \times (+2,3) = + 871 \text{ cm}^4$$

Momentele de inerţie principale (analitic)

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}(4.380 + 2.385) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(4.380 - 2.385)^2 + 4 \times 871^2} =$$

$$= 3.382,5 \pm 500 \times 2,65 = 3.382,5 \pm 1.325$$

$$I_1 = 4.707,5 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = 2.057,5 \text{ cm}^4$$

Orientarea axelor principale de inerţie .

$$tg 2\alpha = \frac{2 \times 871}{2.385 - 4.380} = - 0,875$$

$$2\alpha = - 41^0 20'$$

(născut de la axa "z_+" spre axa "y_-")

$$\alpha = - 20^0 40'$$

Cercul de inerţie (calculul grafic).

rp

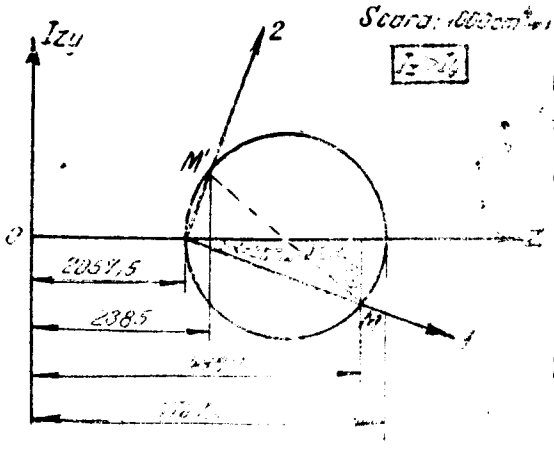


Fig. 158

4.19. Se dă secţiunea din figura de mai jos, reprezentînd un cap de susţinere la o presă de golire de fund.

Se cere :

1. **Calculul centrului de greutate al figurii (analitic).**
2. **Calculul grafic al momentelor de inerţie în raport cu axele Y şi Z care trec prin centrul de greutate şi al momentului de inerţie centrifugal I_{zy};**

... momentelor principale de inerţie şi orientarea ... principale, folosind ercul lui Mohr.

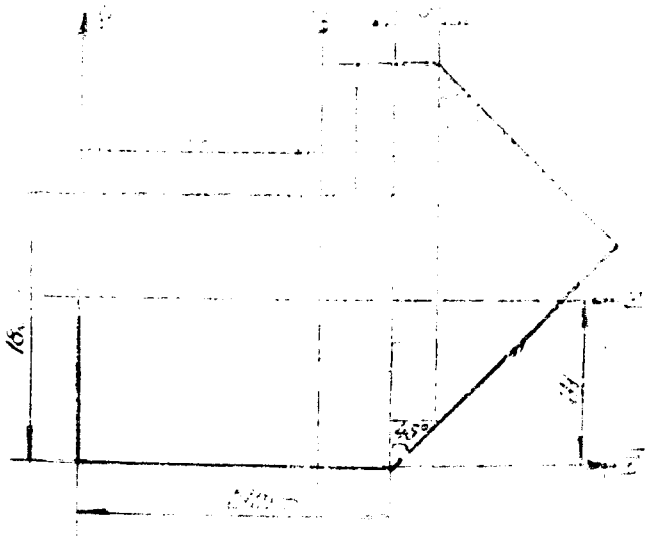


Fig. 159

Pentru calculul centrului de greutate al secţiunii, împărţim figura în patru suprafeţe simple (două dreptunghiuri şi două triunghiuri) şi luăm drept axă de referinţă - sistemul ZOY.

Nr. crt.	Suprafaţa A (cm^2)		Distanţa (cm)	
1	180.210	37800	90	105
2	30.240	7200	150	225
3	$\frac{1}{2}$ 120.240	14400	150	280
4	$\frac{1}{2}$ 30.30	450	20	220

Rezultă :

$$Z_G = \frac{37800 \cdot 105 + 7200 \cdot 22 + 14400 \cdot 280 + 450 \cdot 220}{53\ 850} = 162,5 \text{ cm}$$

$$Y_G = \frac{37800 \cdot 90 + 7200 \cdot 150 + 14400 \cdot 150 + 450 \cdot 20}{59\ 850} = 111,2 \text{ cm}$$

2.a. Pentru determinarea momentului de inerţie în raport cu axa Y, împărţim figura în 10 fîşii paralele cu axa "Y". (figura 160).

Din împărţirea făcută au rezultat ariile :

rp

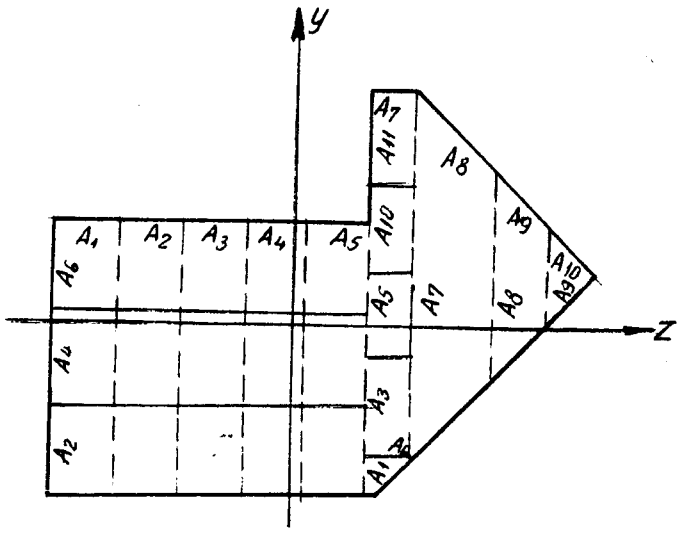


Fig. 160

$A_1=A_2=A_3=A_4=A_5 = 7560\ cm^2$

$A_6 = 450\ cm^2$ $A_7 = 7200\ cm^2$

$A_8=8000\ cm^2$ $A_9 = 4800\ cm^2$

$A_{10} = 1600\ cm^2$

Total: $\sum_1^{10} A_i = 59.850\ cm^2$

Suprafaţa fiecărei fîşii o analizăm cu o forţă şi construim pligonul forţelor şi apoi poligonul funicular

Pentru trasarea poligonului forţelor, alegem scara suprafeţelor 1:5000; distanţa polară "H" o măsurmă la aceeaşi scară.

Prin construirea poligonului funicular, obţinem momentele statice ale fîşiilor A_1, A_2, ..., A_{10} - faţă de axa Y.

Asimilînd valoarea momentelor statice cu forţe ce trec prin centrul de greutate al rîşiilor respective, construim al doilea poligon al forţelor (cu distanţa polară "H" măsurată la scara lungimilor 1:20) şi apoi poligonul funicular corespunzător.

Din construcţie, rezultă :

$H = 4.5000 = 20.000\ cm^2$

$H_1 = 4.20 = 80\ cm$

$n = 15.20 = 300\ cm$

$I_y = n.H.H_1 = 300.80.20000 = 480.10^6\ cm^4.$

b). Acelaş raţionament pentru aflarea momentului de inerţie faţă de axa "Z".

$A_1 = 450\ cm^2$

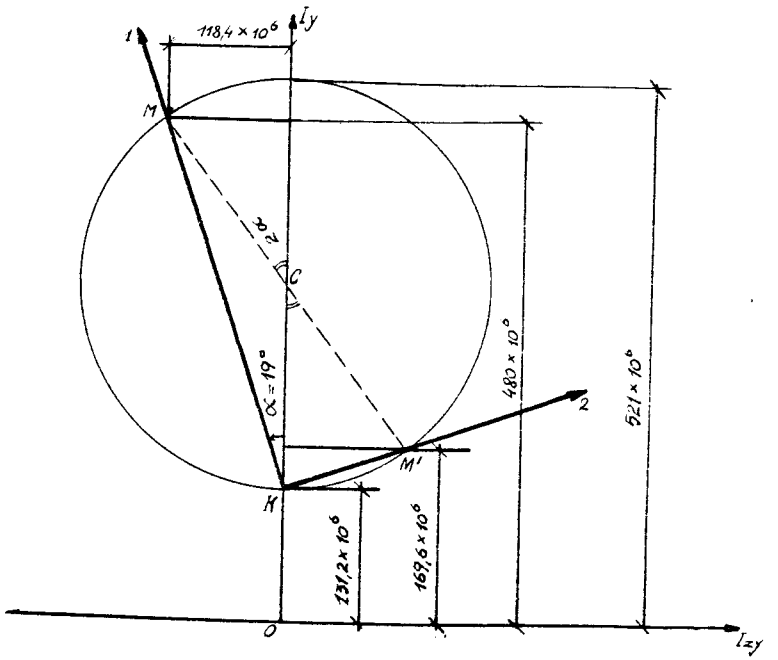
$A_2 = A_4 = A_6 = 12600\ cm^2$

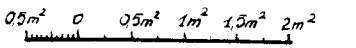
$A_3 = A_5 = A_{10} = A_{11} = 1800\ cm^2$

$A_7 = 8000\ cm^2$ $A_8 = 4800$ $A_9 = 1600\ cm^2$

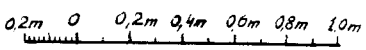
$\sum_1'' A_1 = 59850\ cm^2$ $H = 4.5000 = 20000\ cm^2$

$H_1 = 4.20 = 80\ cm$ $n' = 5,3.20 = 106\ cm$

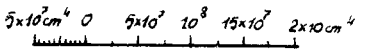




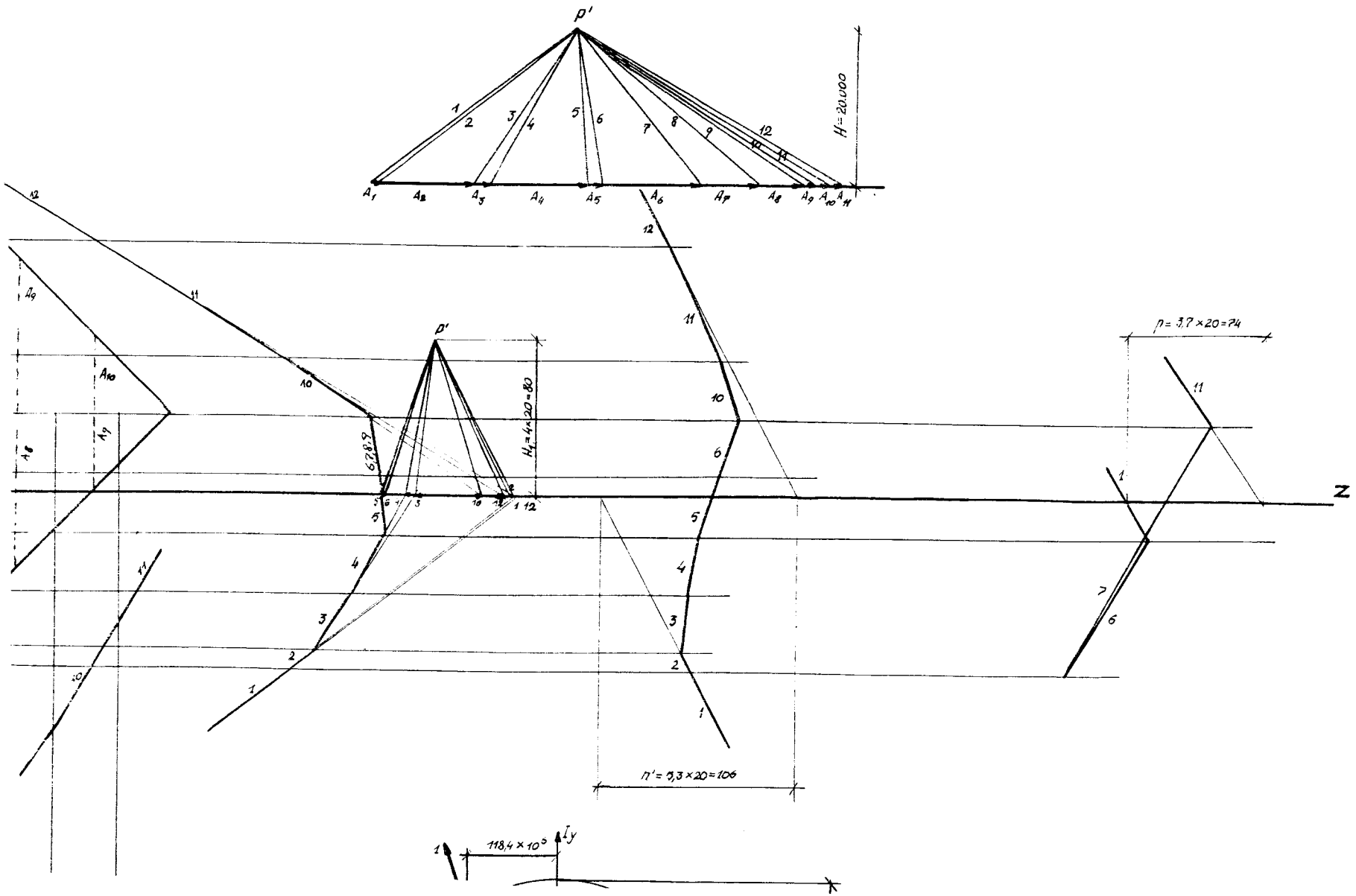
Scara suprafețelor

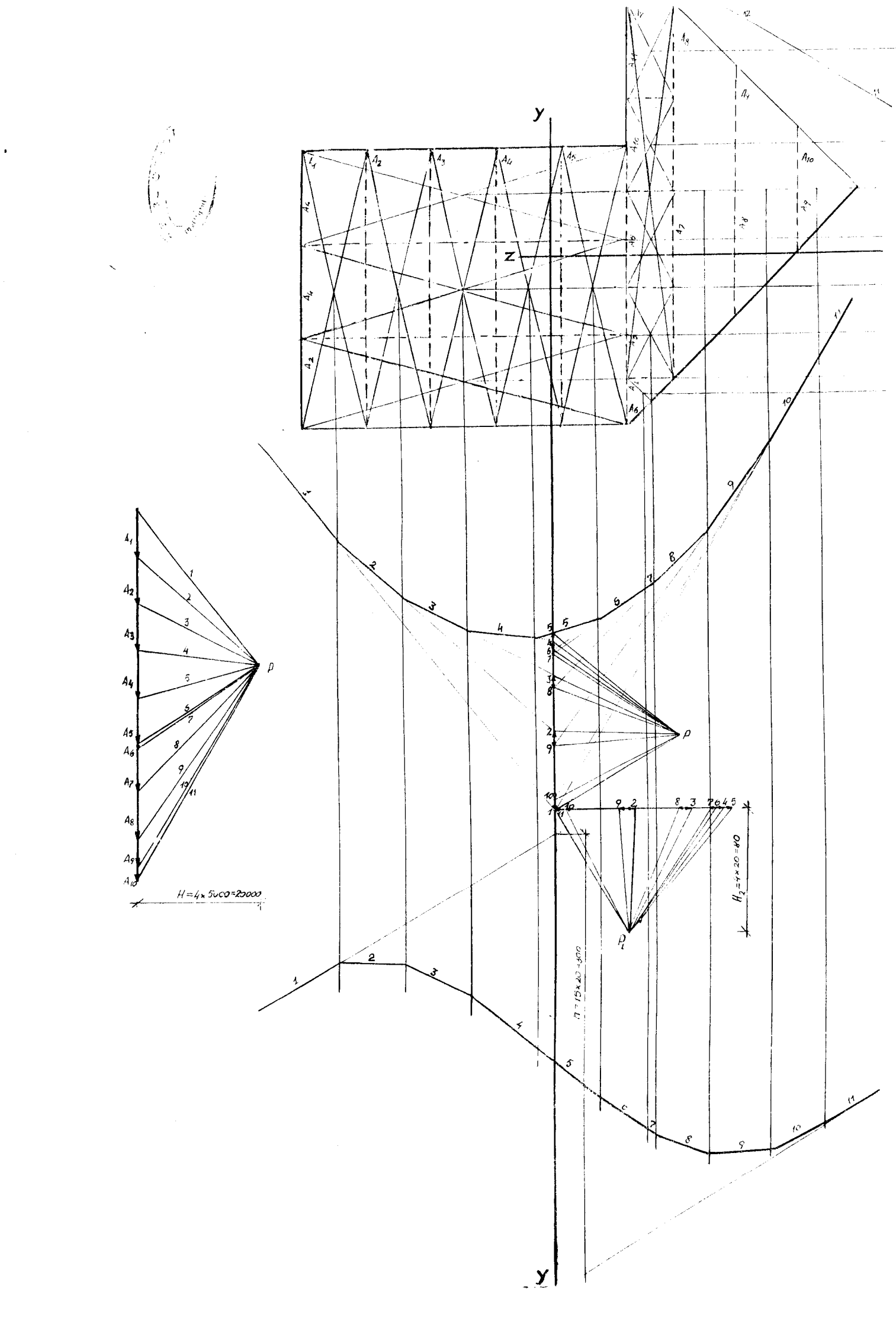


Scara lungimilor



Scara momentelor de inerție


p'
H= 20.000
A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8 A9 A10 A11
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
p'
H4=4×20=80
p= 3,7×20=74
n'= 5,3×20=106
118,4×10³
Iy
z


y
z
y
p
p
p1
H=4×5000=20000
H2=4×20=80
H1=15×20=300

$I_z = n'.H.H_1 = 106.80.20000 = 169,6 \cdot 10^6$ cm^4.

Observaţie: Momentele de inerţie axiale obţinute sînt aproximativ determinate, deoarece nu conţin şi termenii ce privesc, pentru fiecare fîşie în parte, momente de inerţie proprii faţă de axa centrală paralelă cu "Y" (sau "Z").

c). Pentru calculul momentului de inerţie centrifugal I_{zy}, folosim valorile momentelor statice în raport cu axa Y, rezultate din construirea poligonului funicular respectiv.

Apoi rabatem cu 90° suportul şi construim pe baza lui un poligon al foţelor (distanţa polară "H_2"). Faţă de direcţiile forţelor (paralele cu axa "Z") construim poligonul funicular.

Rezultă, $H = 4.5000 = 20000$ cm^2

$H_2 = 4.20 = 80$ cm

$p = 3,7.20 = 70$ cm

$I_{zy} = p.H.H_2 = 74.80.20000 = 118,4.10^6$ cm^4. (pozitiv).

Din rezultat lipsesc termenii momentului de inerţie centrifugal al fîşiilor faţă de axele centrale proprii, paralele cu axele "YOZ" (exceptînd dreptunghiurile).

3. Deoarece I_y I_z, alegem ca axă verticală - axa "I_y".

Punem în compas valorile segmentelor n, n' şi p şi le aşezăm pe axele respective /I_y, I_z, I_{zy}/ Construim cercul lui Mohr. Rezultă, la scară:

$I_1 = 16,3 \quad 32.10^6 = 521.10^6$ cm^4

$I_2 = 4,1.32.10^6 = 131,2.10^6$ cm^4.

$\alpha = -19°$.

Capitolul V

Încovoiere simplă. Starea de tensiune plană. Încovoiere în domeniul plastic. Grinzi cu secţiune compusă. Încovoiere oblică.

1.- Eforturile unitare σ şi τ care apar într-un punct oarecare S în cazul unei secţiuni solicitate la încovoiere, au următoarele expresii :

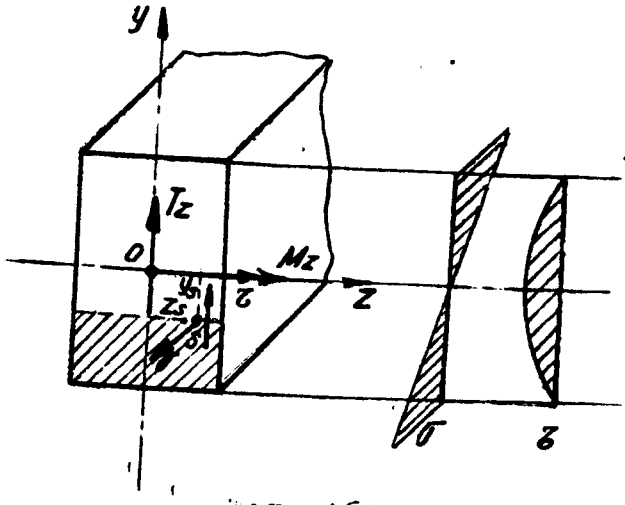


Fig. 161

$$\sigma_s = + \frac{M_z}{I_z} y_s \quad \text{şi}$$

$$\tau_s = \frac{T_z S_z}{b I_z}$$

unde

M_z şi T_z sînt eforturile secţionale

y_s şi z_s sînt coordonatele punctului în care calculăm eforturile unitare σ şi τ.

I_z - momentul de inerţie al întregii secţiuni în raport cu axa z

b - laţimea secţiunii în dreptul punctului S (se măsoară perpendicular pe direcţia forţei tăietoare T_z)

S_z - momentul secţiunii care "lunecă" în raport cu axa neutră oz. Sensul eforturilor σ şi τ rezultă din semnul eforturilor secţionale T_z şi M_z.

2. Dimensionarea unei grinzi solicitate la încovoiere se face cu formula :

$$W_{z\ nec} = \frac{M_{z\ max}}{\sigma_a}$$

iar verificarea, cu expresia :

$$\sigma_{ef,max} = \frac{M_{z\ max}}{W_{z\ ef}} \leq \sigma_a$$

Momentul capabil al unei grinzi, este momentul maxim pe care-l poate prelua la încovoiere, fiind în funcţie de natura materialului şi de caracteristicile geometrice ale secţiunii.

$$M_{cap} = W_{z\ ef} \cdot \sigma_a$$

3.- Modulul de rezistenţă W_z pentru o anumită secţiune se calculează cu formula $W_z = \frac{I_z}{y_{max}}$, distanţele y măsurîndu-se de la axa neutră (care trece prin centrul de greutate al secţiunii).

pentru un dreptunghi $W_z = \frac{b\,h^2}{6}$ (b este latura paralelă cu axa z).

Pentru un cerc $W_z = \frac{\pi d^3}{32}$

4.- In domeniul plastic se consideră că eforturile unitare σ_c sînt uniform distribuite în secţiune, axa neutră nu mai trece prin centrul de greutate al secţiunii, determinarea poziţiei ei se face punînd condiţia ca suprafaţa comprimată să fie egală cu suprafaţa întinsă adică $A_c = A_t$

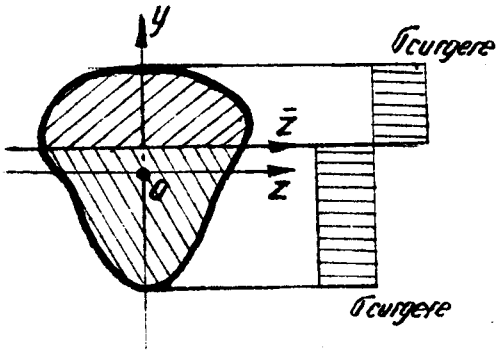


Fig. 162

Momentul admsibil al unei secţiuni dupa metoda plastică sau a capacităţii portante, se exprimă prin relaţia :

$M'_{lim} = M'_{ad} = (S_1 + S_2)\,\sigma_a = W_p\,\sigma_a$

unde S_1 şi S_2 sînt momentele statice ale zonei comprimate şi a celei întinse în raport cu axa neutră $\bar{z}$.

Suma celor 2 momente statice (S_1+S_2) poartă denumirea de modul de rezistenţă în stare plastica şi se notează cu W_p.

In cazul secţiunilor simetrice $S_1 = S_2$ şi atunci W_p se poate scrie că este $W_p = 2\,S_0$.

In cazul unui dreptunghi $W_p = \frac{b\,h^2}{4}$

Modulul de rezistenţă plastic W_p este todeauna mai mare decît cel corespunzător elastic - raportul $\frac{W_p}{W_e}$ e întodeauna supraunitar, cu cît materialul este mai concentrat la periferie cu atît raportul $\frac{W_p}{W_e}$ se apropie mai mult de unitate.

La profile I $\frac{W_p}{W_e} = 1{,}16$

La dreptunghi $\frac{W_p}{W_e} = 1{,}5$

5.- Calculul direcţiilor şi eforturilor principale se face analitic sau grafic.

Considerînd că pe feţele unui pătrăţel dintr-un anumit punct, se cunosc eforturile unitare σ_x, σ_y şi τ_{xy} se pot trasa aproximativ direcţiile principale 1 şi 2 astfel :

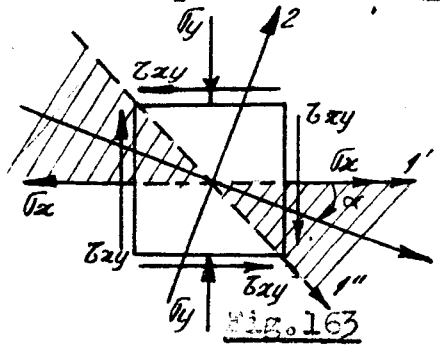


Fig.163

Vom considera că asupra elementului acţionează numai eforturile unitare normale σ_x şi σ_y - direcţia 1 pe care o vom nota 1' va fi direcţia efortului σ_x (direcţia efortului unitar cu valoare relativă mai mare).

Presupunînd că asupra pătrăţelului acţionează numai eforturile unitare tangenţiale τ_{xy}, direcţia 1 pe care o vom denumi 1" va fi diagonala întinsă a acestuia. Suprapunînd efectele vom căpăta direcţia finală 1 care va fi undeva între direcţiile 1' şi 1". Direcţiile eforturilor principale se pot calcula exact analitic sau determina grafic.

Metoda analitică foloseşte pentru determinarea direcţiilor eforturilor principale relaţia,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

unde unghiul α se măsoară de la direcţia 1' (vezi figura alăturată).

iar pentru stabilirea eforturilor unitare principale expresia:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Metoda grafică utilizează construcţia cercului lui Mohr.

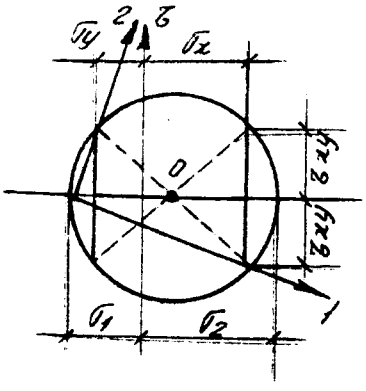


Fig.164

Se pun la scară eforturile unitare σ_x, σ_y şi τ_{xy}.

Se găseşte apoi poziţia centrului cercului la jumătatea distanţei dintre σ_x şi σ_y. Cu raza $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ se duce un cerc; locul unde intersectează axa absciselor determină valorile eforturilor unitare principale σ_1 şi σ_2, iar direcţiile eforturilor principale 1 şi 2 se pot stabili uşor cu ajutorul construcţiei auxiliare a pătrăţelului.

Înfăşurătoarele direcţiilor 1 şi respectiv a direcţiilor 2 în diverse puncte ne dau traiectoriile direcţiilor eforturilor principale numite impropriu linii izostatice.

6.- La grinzi cu secţiune compusă elementele de solidarizare trebuie să preia forţa de lunecare aferentă lor.

Forţa de lunecare pe o distanţă x_1-x_2 se poate scrie

$$L_{x1-x2} = \frac{S}{I}\int_{x_1}^{x_2} T_x dx = \frac{S}{I}\Delta M_{x2-x1}$$

Aproximativ şi acoperitor (considerînd forţa tăietoare maximă constantă) forţa de lunecare se poate exprima :

$$L_{x_1-x_2} = \frac{S}{I} T_{max} l_{x_1-x_2}$$

a) La grinzi cu inima plină nituite vom scrie că forţa de lunecare pe distanţa e, aferentă unui nit trebuie să fie preluată de acesta atît prin forfecare cît şi prin strivire.

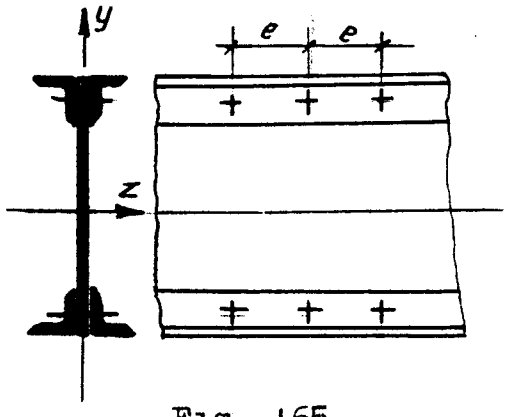


Fig. 165

Deci, $\frac{S}{I_{br}} T_{max} \cdot e = R_{min}$

de unde:

$$e = \frac{R_{min} I_{br}}{S T_{max}}$$

unde: R_{min} este rezistenţa minimă a nitului - se alege valoarea cea mai mică dintre rezistenţele nitului: la forfecare R_f sau la presiunea pe gaură (strivire) R_p.

I_{br} - este momentul de inerţie brut al secţiunii întregi

T_{max} - forţa tăietoare maxima,

S - este momentul static al secţiunii care "lunecă" în raport cu axa neutră z, sau mai corect spus este momentul static ale secţiunii care ar luneca dacă nu ar exista nîturile pe care le calculăm.

b) La grinzi cu inima plina sudate cu sudură continuă vom scrie că forţa de lunecare pe anumita lungime (de exemplu e) este preluată de două cordoane de sudură de aceeaşi lungime.

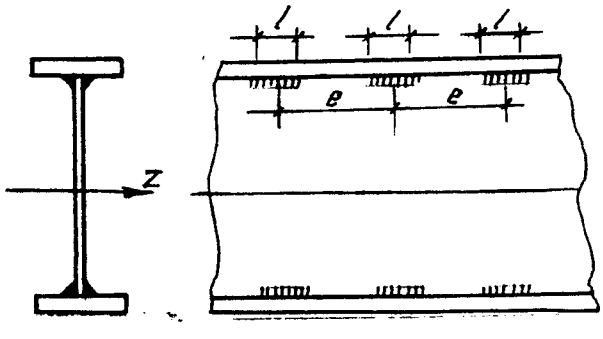


Fig.166

Astfel :

$\frac{S}{I} T_{max} e = 2 a e \sigma_{as}$, de unde rezultă valoarea a a sudurii

$$a = \frac{S T_{max}}{2 I \sigma_{as}}$$

In cazul că a rezultă mai mic de 0,4 cm - valoarea minimă din motive constructive - va

trebui să apelam la sudura discontinua.

In această variantă cordoane de sudură de lungime l se aşează la distanţa e (vezi figura alaturată). Se poate scrie că forţa de lunecare pe distanţa e trebuie preluată de două cordoane de sudură de lungime l

$$\frac{T_{max} S}{I} e = 2 a l \sigma as$$

De aci reiese valoarea raportului $\frac{e}{l}$

$$\frac{e}{l} = \frac{2 a \sigma as}{T_{max} S}$$

... presupunându-se o valoare pentru l se determină distanţa e la care se vor aşeza cordoanele de sudură.

c) La grinzi cu pene, forţa de lunecare, calculata după metoda exactă, trebuie preluată de un numar de pene prin strivire sau forfecare.

Deci : $T_o = \frac{S}{I} \int_e Tx\, dx = n R_{min}$ unde R_{min} este rezistenţa minimă a penei.

Penele se vor dispune astfel incât fiecăreia să-i revină acelaş forţa de lunecare, deci aceeaşi suprafaţă de forţă tăietoare.

In consecinţă suprafaţa de forţe tăietoare se va împărţi la n părţi, penele plasîndu-se în centrele de greutate ale acestor suprafeţe.

7.- Incovoierea oblică diferă de încovoierea simplă prin faptul că direcţia incarcării şi a momentului încovoietor nu corespund cu secţiune cu direcţiile principale de inerţie.

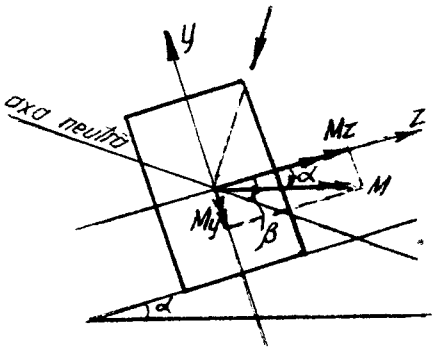


Fig.167

Dimensionarea în cazul încovoierii oblice se face cu formula :

$$W_{z\,nec} = \frac{M_{z\,max}}{\sigma_a}(1+u\, tg\alpha)$$ unde cu u s-a notat raportul $\frac{W_z}{W_y}$

Pentru dreptunghi u se va lua 1,5
Pentru profil U sau I u = 7-8
verificarea se face obligatoriu, cu expresia :

$$\sigma_{ef\,max} = \frac{M_{z\,max}}{W_z} + \frac{M_{y\,max}}{W_y} \leq \sigma_a$$

Axa neutră este o dreaptă care trece prin origine, făcînd unghiul β cu axa z

tangenta unghiului β este dată de expresia :

$$tg\,\beta = tg\,\alpha \frac{I_z}{I_y}$$

Deci unghiul β se confundă cu α numai în cazul unui cerc sau pătrat, în mod obişnuit fiind mai mare decît acesta.

5.1. Să se dimensioneze grinda din lemn din figură avînd o secţiune dreptunghiulară.

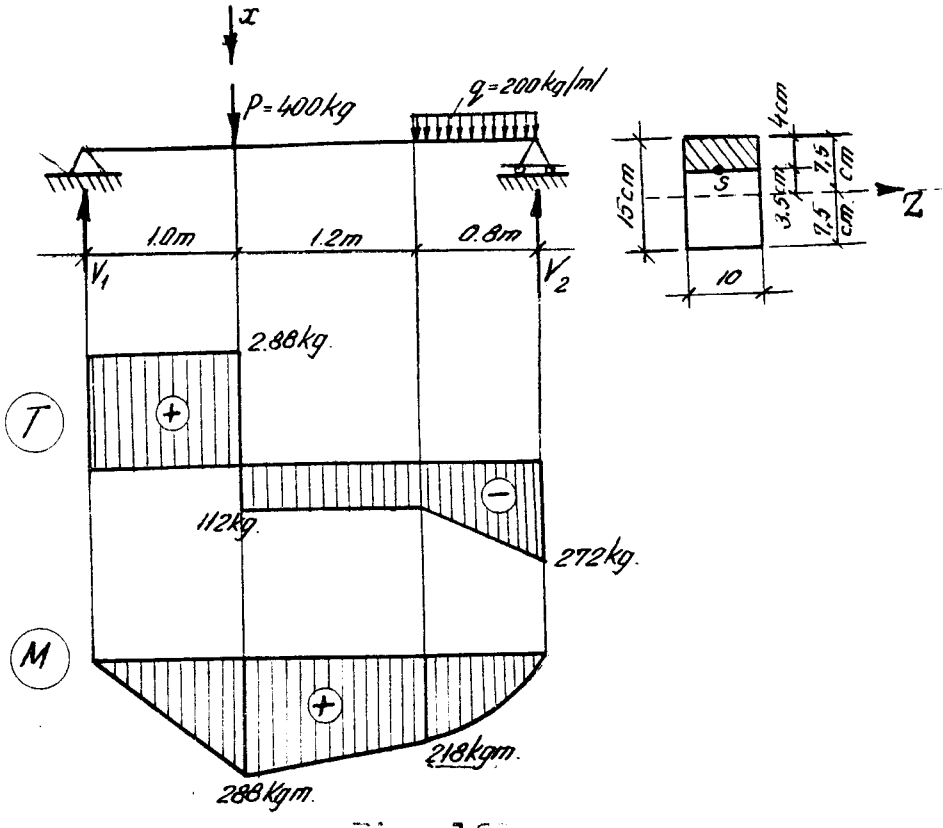


Fig. 168

1.- Se vor calcula eforturile unitare σ şi τ precum şi dimensiunile şi eforturile principale grafic şi analitic în punctul S ($x = 2{,}00$ m şi $y = 3{,}5$ cm deasupra axei neutre).

2.- Care este valoarea maximă a forţei X cu care poate fi mărită forţa P ca grinda să reziste.

Dimensionarea grinzii se face, la momentul încovoietor maxim .

calculul secţiunilor :

$$V_1 = \frac{400 \times 3 + 0{,}60 \times 200 \times 0{,}4}{3{,}00} = 288\ kg$$

$$V_2 = \frac{400 \times 1 + 0{,}6 \times 200 \times 2{,}40}{3{,}00} = 272\ kg$$

verificarea se face proiectînd pe verticală :

$288 \times 272 = 400 + 2 \times 0,80$

Momentul încovoietor maxim: $M_{max} = 288 \times 1,00 = 288$ kg.

$$W_{nec} = \frac{M_{max}}{\sigma_a} = \frac{28.800}{100} = 288 \text{ cm}^3 = \frac{b\,h^2}{6} = \frac{h^3}{9} \text{ se ia la lemn } \frac{h}{b} = 1,5$$

$$h_{nec} = \sqrt[3]{9 \cdot 288} = 13,7 \text{ cm}$$

$$b_{nec} = \frac{h}{1,5} = \frac{13,7}{1,5} = 9,15 \text{ cm}$$

Alegem o secţiune dreptunghiulară : 10 x 15 cm

Verificare :

$$W_{ef} = \frac{10 \times 15^2}{6} = 375 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{ef\ max} = \frac{M_{max}}{W_{ef}} = \frac{28800}{375} = 77 \text{ kg/cm}^2 < 100 \text{ kg/cm}^2$$

Pentru a calcula eforturile unitare σ şi τ în punctul S trebuie stabilite eforturile secţionale T şi M din secţiunea respectivă.

$M_S = 288 \times 2 - 400 \times 1 = 176$ kg

$T_S = 288 - 400 = -112$ kg.

$$I = \frac{10 \times 15^3}{12} = 2820 \text{ cm}^4$$

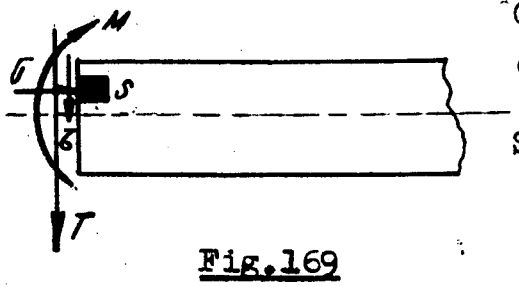


Fig.169

Ca valoare :

$$\sigma = \frac{17600}{2820} \cdot 3,5 = 21,8 \text{ kg/cm}^2$$

$$S = 4 \times 10 \times 5,5 = 220 \text{ cm}^3$$

$$\tau = \frac{112 \times 220}{10 \times 2820} = 0,88 \text{ kg/m}^2$$

Pentru a stabili sensul eforturilor unitare σ şi τ, vom face o elevaţie a grinzii punînd în secţiunea ce trece prin punctul S eforturile secţionale, momentul încovoietor M şi forţa tăietoare T cu semnele lor din diagrame.

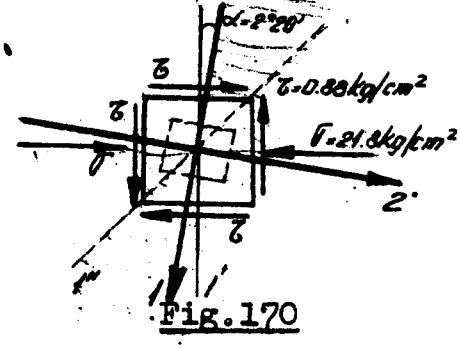


Fig.170

Izolînd pătrăţelul şi punînd pe feţele sale eforturile unitare σ şi τ putem stabili aproximativ direcţiile principale 1 şi 2.

Grafic direcţiile şi eforturile unitare principale se calculează cu cercul lui Mohr.

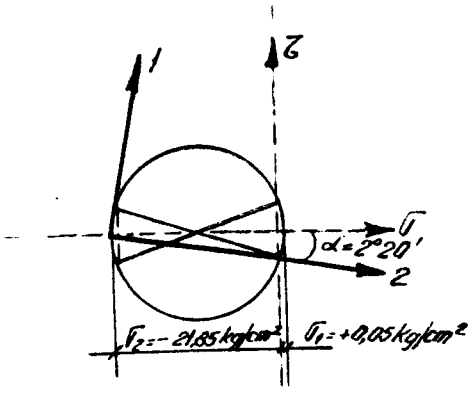


Fig.171

Analitic: $tg\ 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 0,08}{21,8 - 0} = 0,0733$

$2\alpha = 4°12'$

$\alpha = 2°06'$

Se vede că α e foarte mic, eforturilor τ e foarte mică, deci direcţia (1) se apropie foarte mult de (1').

$$\sigma_{1,2} = \frac{21,8}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{21,8^2 + 4 \times 0,08^2} = 10,9 \pm 10,95$$

$\sigma_1 = + 0,05\ kg/cm^2$

$\sigma_2 = - 21,85\ kg/cm^2$

5.- Pentru a calcula cantitatea X cu care se poate mări forţa P, vom egala momentul capabil cu momentul încovoietor maxim rezultat din sarcinile existente pe grindă şi cantitatea X care se va aşeza ulterior.

$M_{cap} = W_{ef} \times \sigma_a = 375 \times 100 = 37500\ kg \cdot cm = 375\ kg \cdot m$

$M_{max} = 288 \times 1 + \frac{X \cdot 2}{3} \times 1 = 288 + 0,67X$

$288 + 0,67X = 375$ de unde $X = \frac{375 - 288}{0,67} = 130\ kg$

5.2. Să se dimensioneze grinda metalică cu încărcările din figură dintr-un profil I.

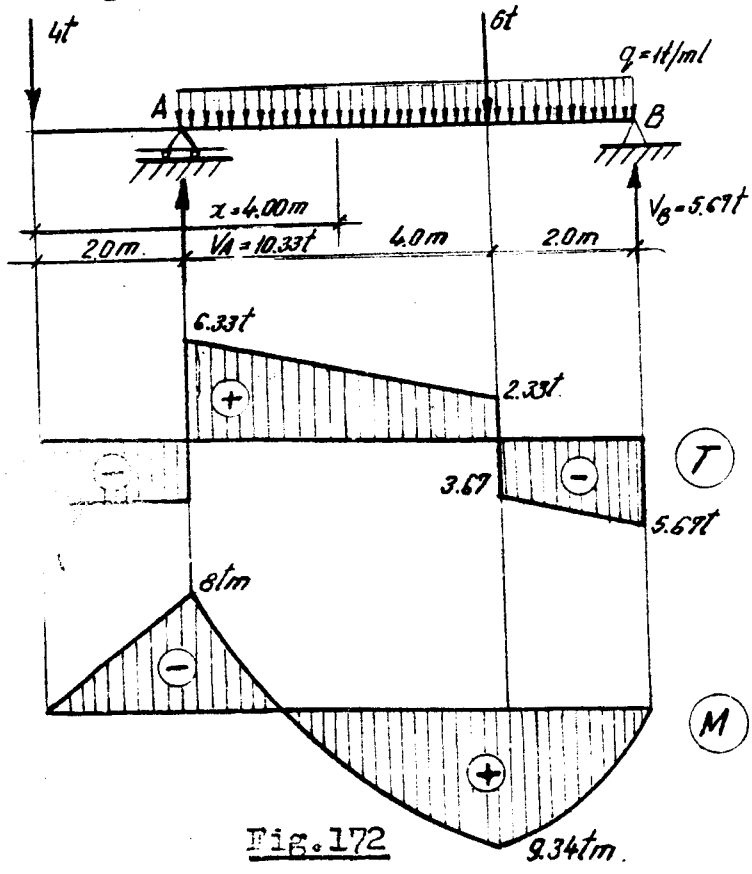


Fig.172

Înainte de a calcula eforturile unitare σ şi τ pentru a găsi direcţiile şi eforturile principale trebuie să analizăm în punctul 1 (x = ..., y = ... şi z = ... cm deasupra axei neutre).

2.- Să se calculeze σ şi τ într-o secţiune înclinată cu 28° faţă de direcţia principală 1.-

Se le [illegible] dinamometrele [illegible]

$$= \frac{4 \times 2,0 + \quad = 1,0 + 1 \times 6,0 \times 3,0}{6,0} = \frac{62,0}{6,0} = 10,33 \text{ T}$$

$$= \frac{6 \times 4,0 + 1 \times 6,0 \times 3,0 - 4 \times 2,0}{6,0} = \frac{62,0}{6,0} = 5,67 \text{ T}$$

Momentul maxim încovoietor este :

$M_{max} = 5,67 \times 2 - 1 \times 2 \times 1 = 9,34$ tm

Dimensionare:

$$W_{nec} = \frac{M_{max}}{\sigma_a} = \frac{934,0}{1,4} = 667 \text{ cm}^3$$

Se alege un profil I 32 având

$W_{ef} = 782 \text{ cm}^3$ şi $I_{ef} = 12,510 \text{ cm}^4$

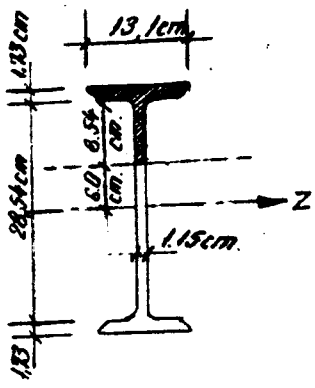


Fig.173

Verificare :

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_{ef}} = \frac{934,000}{782} = 1200 \text{ kg/cm}^2$$

1.- Pentru a calcula σ şi τ precum şi direcţiile şi eforturile principale în punctul S se determină eforturile secţionale T_S şi M_S

$T_S = 6,33 - 1 = 5,33$ t

$M_S = -4 \times 4 + 10,33 \times 2 - 1 \times 2,1 = 2,66$ tm

Făcînd o secţiune în dreptul punctului S şi cunoscînd semnul momentului încovoietor M_S şi a forţei tăietoare T_S din diagramele M,T - vom calcula valoarea numerică a lui σ şi τ în punctul S.

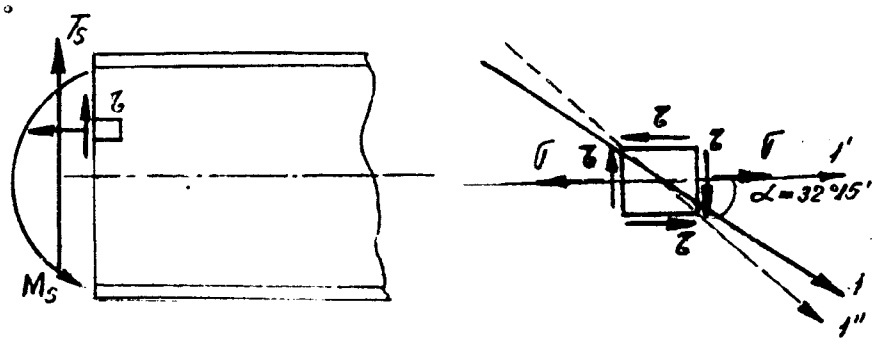


Fig. 174

$$\sigma = \frac{266000}{12510} \cdot e = 127 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau = \frac{4330 \times 444}{1,15 \times 12510} = 133 \text{ kg/cm}^2$$

$S = 13,1 \times 1,73 \times 15,14 + 1,15 \times 6,54 \times 10,27 = 444 \text{ cm}^3$

Construim cercul lui Mohr pentru determinarea direcţiilor principale şi a eforturilor principale.

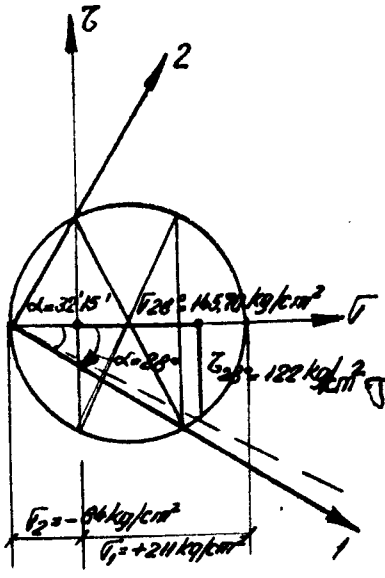


Fig. 175

Analitic direcţiile şi eforturile principale se calculează cu formulele :

$$tg\ 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma} = \frac{2 \times 1,33}{127} = 2,09$$

$$90^0 - 2\alpha = 25^0 30'$$

$$2\alpha = 64^0 30'$$

$$\alpha = 32^0 15'$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{127}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{127^2 + 4 \times 133^2} = +63,5 \pm 147,5$$

$$\sigma_1 = +24\ kg/cm^2$$

$$\sigma_2 = -84\ kg/cm^2$$

2.- Eforturile unitare σ şi τ pe o secţiune înclinată cu 28^0 faţă de direcţiile principale se pot urmări pe cercul lui Mohr.

Intersectînd cercul lui Mohr cu o dreaptă avînd K înclinarea cerută - vom rezulta eforturile τ şi σ pe secţiunea înclinată la 28^0.

Analitic eforturile unitare σ_α şi τ_α pe o secţiune înclinată faţă de direcţiile principale (în cazul cînd cunoaştem eforturile unitare principale) sînt :

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$\tau_s = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

$$\alpha = 28^0 \qquad 2\alpha = 56^0$$

$$\sin 2\alpha = 0,828$$

$$\cos 2\alpha = 0,557$$

$$\sigma_2 = -84\ kg/cm^2$$

$$\sigma_1 = 211 kg/cm^2$$

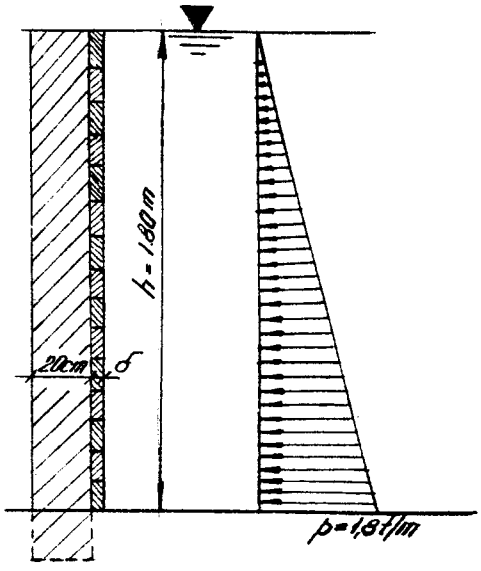
De unde :

$$\sigma_{28^0} = \frac{-211-84}{2} + \frac{211+84}{2}\ 0,557 = +63,5 + 82,2 = 145,7$$

$$\tau_{28^0} = \frac{+24 + 84}{2}\ 0,828 = 122\ kg/cm^2$$

5.3. Se dă palplanşa din lemn din figură, alcătuit din stîlpi de secţiune dreptunghiulară 15 x 20 cm şi dulapi orizontali. (fig. 176).

Se cere :



1.- La ce distanţă "d" trebuie aşezaţi stîlpii din lemn.

Se dă σ_{af} = 100 kg/cm^2

2.- Grosimea dulapilor orizontali.

1. Stîlpii sînt supuşi la încovoiere şi compresiune (din greutatea proprie) pe care o neglijem.

Intrucît e dată secţiunea şi materialul (σ_a) stîlpilor putem cunoaşte momentul capabil pe care-l poate prelua : $M_{cap} = W_z ef \times \sigma_a$

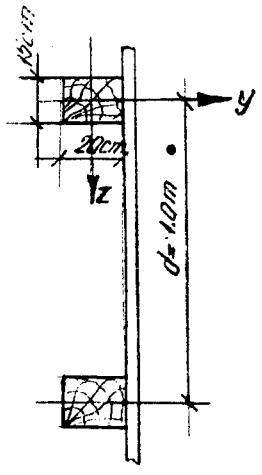


Fig. 176

$$W_z ef = \frac{15 \times 20^2}{6} = 1000 \text{ cm}^3$$

$$M_{cap} = 1000 \times 100 = 100.000 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

Momentul încovoietor maxim este :

$$M_{max} = \frac{q}{2} \frac{h}{3} \; ; \; q = (p\ d)\ T/ml$$

$$\text{Deci, } M_{max} = \frac{p\ d\ h^2}{6} = \frac{1,8 \times d.1,8^2}{6} =$$

$$= (0,967\ d)\ Tm = (96700\ d) kg \cdot cm$$

La limită: $M_{cap} = M_{max}$

Rezultă d max la care se poate aşeza stîlpii

$$96700\ d = 100.000$$

d_{max} = 1,03 m Vom alege d = 1,00 m

Dimensionarea dulapilor se va face la încovoiere: ei vor fi consideraţi ca nişte elemente simplu rezemate pe stîlpi, considerînd ca încărcare presiunea maximă a apei.

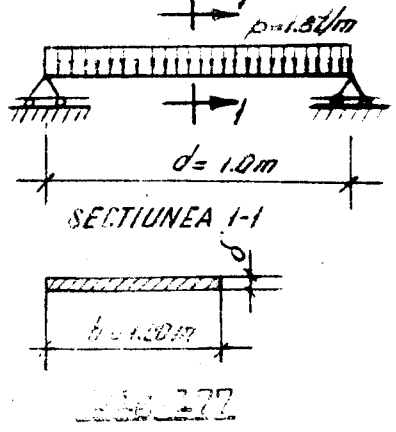


Fig. 177

Vom lua înălţimea b de 1,00 m

$$M_{max} = \frac{1,8 \times 1^2}{8} = 0,225 \text{ Tm} = 22500 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$W_{nec} = \frac{100 \times \delta^2_{nec}}{6} = \frac{22500}{100}$$

$$\delta_{nec} = \sqrt{13,5} = 3,68 \text{ cm}$$

Se vor alege dulapi avînd o grosime de 4 cm

5.4. Se dă grinda metalică din figură avînd secţiunea alăturată.

1.- Să se găsească eforturile unitare tangenţiale şi normale maxime

2.- Să se determine reparţia eforturilor σ şi τ în secţiunea x = 0,2 m.

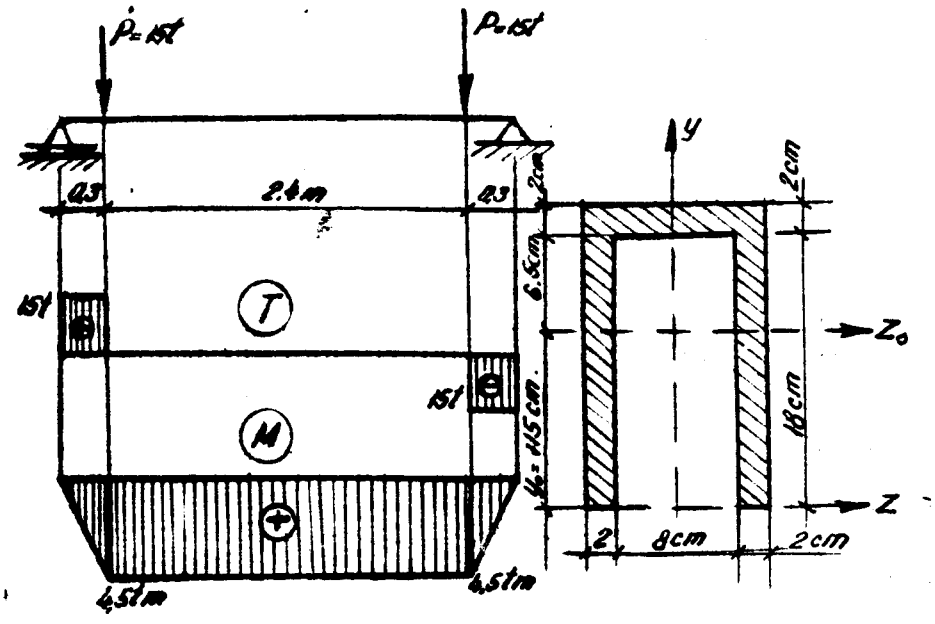


Fig. 178

1.- Eforturile σ şi τ maxime se calculează cu formelele:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W}$$

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}\, S_{max}}{b\, I}$$

Pentru a calcula I şi W trebuie determinat centrul de greutate :

$$y_o = \frac{2 \times 12 \times 19 + 2 \times 2 \times 18 \times 9}{2 \times 12 + 2 \times 2 \times 18} = \frac{1103}{96} = 11,5 \text{ cm}$$

$$I_{z_o} = \frac{12 \times 2^3}{12} + 12x2x7,5^2 + 2 \times \frac{2x18^3}{12} + 2x2x18x2,5^2 = 3720 \text{ cm}^4$$

$$W_{z_o} = \frac{3720}{11,5} = 323 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{max} = \frac{450000}{323} = 1390 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{max} = \frac{15000 \times 263}{4 \times 3720} = 264 \text{ kg/cm}^2$$

$$S_{max} = 2 \times 2 \times 11,5 \times 5,75 = 263 \text{ cm}^3$$

$$b = 2 \times 2 = 4 \text{ cm}$$

2.- Calculăm eforturile unitare σ și τ în punctele caracteristice cu expresiile $\sigma = \frac{M}{I} y$ și $\tau = \frac{T S}{b I}$

$M_x = 15 \times 0{,}2 = 3$ tm

$T_x = \pm 15$ t.

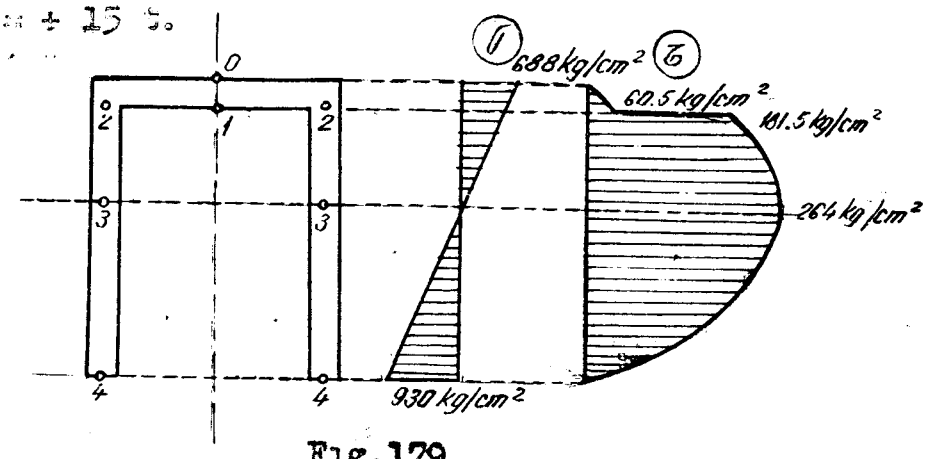


Fig.179

$$\sigma_2 = \frac{300000}{3720} \cdot 8{,}5 = 688 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_3 = \frac{300000}{3720} \cdot 11{,}5 = 930 \text{ kg/cm}^2$$

$$S_1 = 2 \times 12 \times 7{,}5 = 180 \text{ cm}^3$$

$$\tau_1 = \frac{15000 \times 180}{12 \times 3720} = 60{,}5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_2 = \frac{15000 \times 180}{4 \times 3720} = 181{,}5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_3 = \tau_{max} = 264 \text{ kg/cm}^2$$

5.5.- Se dau eforturile unitare σ_x, σ_y și τ_{xy} cu valorile respective pentru fiecare caz în parte.

Se cere să se afle direcțiile și eforturile unitare principale analitic și grafic, pentru cazurile ce urmează :

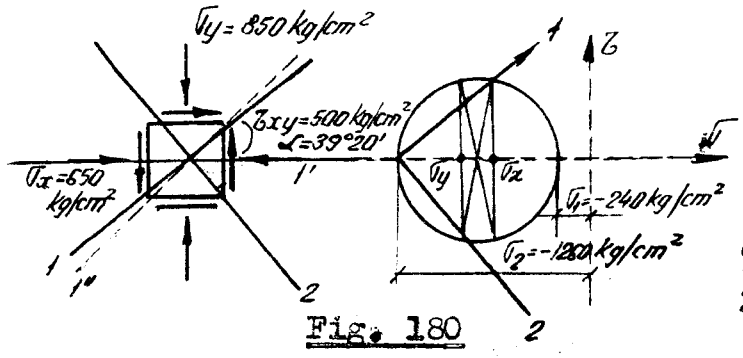


Fig. 180

I. $\sigma_x = -650 \text{ kg/cm}^2$

$\sigma_y = -850 \text{ kg/cm}^2$

$\tau_{xy} = -500 \text{ kg/cm}^2$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \left| \frac{2 \times 500}{850 - 650} \right| = 5$$

$90^0 - 2\alpha = 10^0 20'$

$2\alpha = 78^0 40'$

$\alpha = 39^0 20'$

$$\sigma_{1,2} = -\frac{850+650}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(850-650)^2 + 4 \cdot 500^2} = -750 \pm 510 =$$

$$= \begin{cases} \sigma_1 = -240 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_2 = -1260 \text{ kg/cm}^2 \end{cases}$$

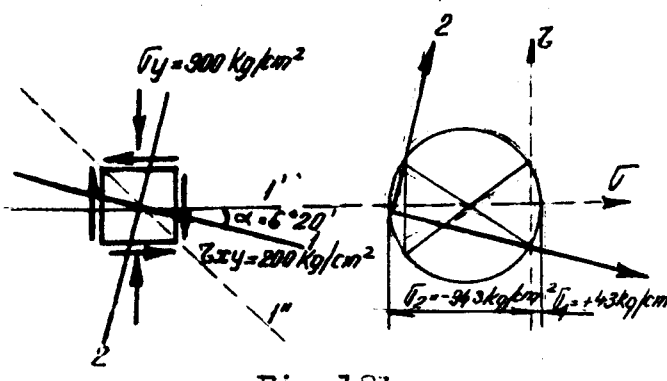


Fig.181

II $\sigma_x = 0$

$\sigma_y = - 900$ kg/cm²

$\tau_{xy} = + 200$ kg/cm²

$$tg\ 2\alpha = \left|\frac{2 \times 200}{900}\right| = 0{,}444$$

$2\alpha = 12^\circ 40'$

$\alpha = 6^\circ 20'$

$$\sigma_{1,2} = -\frac{900}{2} \pm \sqrt{900^2 + 4 \times 200^2} = -450 \pm 493$$

$\sigma_1 = + 43$ kg/cm²

$\sigma_2 = - 943$ kg/cm²

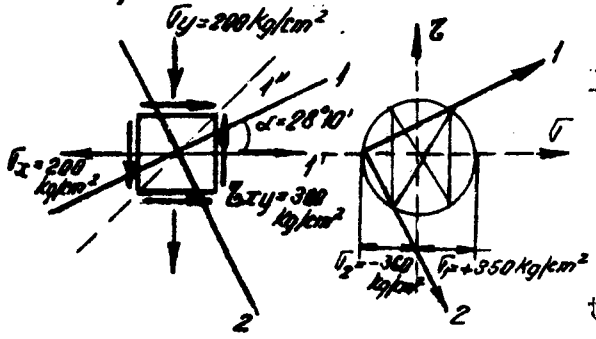


Fig.182

III $\sigma_x = + 200$ kg/cm²

$\sigma_y = - 200$ kg/cm²

$\tau_{xy} = 300$ kg/cm²

$$tg\ 2\alpha = \left|\frac{2 \times 300}{200+200}\right| = 1{,}5$$

$90^\circ - 2\alpha = 33^\circ 40'$

$2\alpha = 56^\circ 20'$

$\alpha = 28^\circ 10'$

$$\sigma_{1,2} = -\frac{200 - 200}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(200 + 200)^2 + 4 \cdot 300^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \pm \frac{100}{2}\sqrt{16 + 36} = \pm 360 \text{ kg/cm}^2$$

$\sigma_1 = + 360$ kg/cm²

$\sigma_2 = - 360$ kg/cm²

$\sigma_x = - 600$ kg/cm²

$\sigma_y = + 200$ kg/cm²

IV $\tau_{xy} = + 300$ kg/cm²

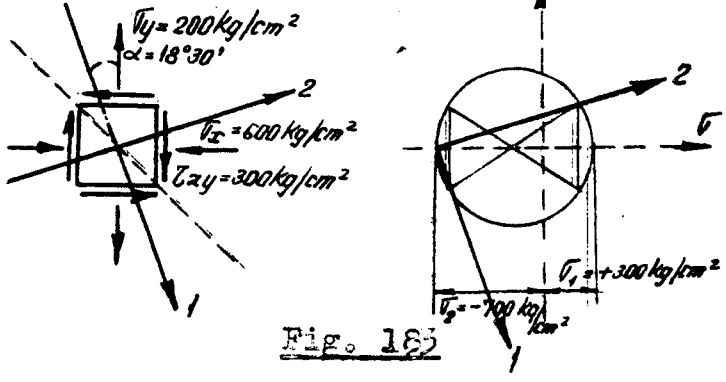


Fig. 183

$$tg\ 2\alpha = \left|\frac{2 \times 300}{200+600}\right| = 0{,}75$$

$2\alpha = 37^\circ$

$\alpha = 18^\circ 30'$

$$\sigma_{1,2} = \frac{200 - 600}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(200 + 600)^2 + 4 \cdot 300^2}$$

$$\sigma_{1,2} = - 200 \pm 500$$

$\sigma_1 = + 300$ kg/cm²

$\sigma_2 = - 700$ kg/cm²

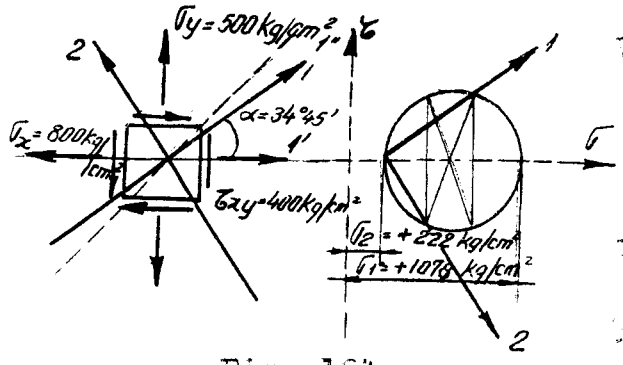


Fig. 134

Vo σ_x = + 800 kg/cm²
σ_y = + 500 kg/cm²
τ_{xy} = - 400 kg/cm²

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \left| \frac{2 \times 400}{800 - 500} \right| = 2,67$$

$90^0 - 2\alpha = 20^0 30'$

$2\alpha = 69^0 30'$

$\alpha = 34^0 45'$

$$\sigma_{1,2} = \frac{800 + 500}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(800 - 500)^2 + 4 \times 400^2}$$

$$\sigma_{1,2} = 650 \pm 428 \begin{cases} \sigma_1 = 1078 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_2 = + 222 \text{ kg/cm}^2 \end{cases}$$

Determinarea grafică a direcţiilor şi eforturilor unitare principale se face cu ajutorul construcţiei cercului lui Mohr, care se poate urmări pentru fiecare caz pe figurile alăturate.

5.6. Să se traseze traiectoriile direcţiilor eforturilor principale trecînd prin punctele A_0 (x = 0,50 m, y = 10 cm deasupra axei neutre) şi B_0 (x = 1,00 m; y = 10 cm deasupra axei neutre) pentru grinda de beton avînd încărcările şi dimensiunile geometrice din figura de mai jos.

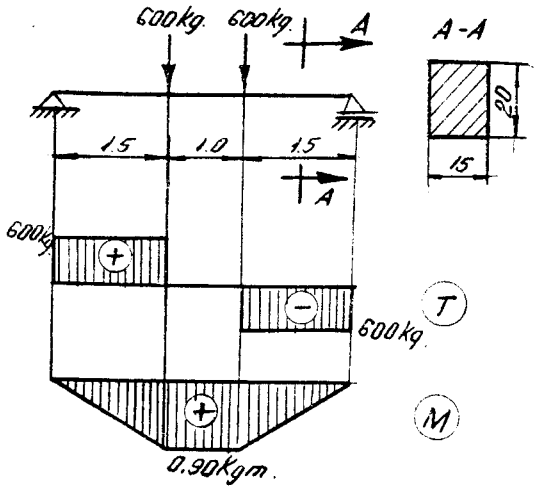


Fig. 135

Vom aplica o metodă aproximativă, trasînd curbele direcţiilor principale 1 prin punctele distanţate pe verticală la 2,5 m unul de celălalt (în acest scop vom trasa pe grindă o serie de linii orizontale distanţate la cîte 2,5 cm pe verticală una de cealaltă.)

Vom porni din punctul A_0 unde sînt următoarele eforturi secţionale :

M = 600 x 0,5 = 300 kg/cm
T = 600 kg

Iar eforturile unitare :

$$\sigma = \frac{M}{I} y = \frac{30000}{10000} \times 10 = 30 \text{ kg/cm}^2$$

şi $\tau = 0$

unde $I = \frac{15 \times 20^3}{12} = 10000 \text{ cm}^4$

Starea de tensiune în punctul A_0 este reprezentată alăturat, se vede deci că direcţia 1 este verticală. Prelungind-o pînă la intersecţia cu următoarea linie orizontală vom găsi punctul A_1.

Starea de tensiune în punctul A_1 se poate urmări în rigură şi rezultă din calculul eforturilor secţionale T şi M precum şi a celor unitare σ şi τ .

$$M = 600 \times 0,5 = 300 \text{ kg·cm}$$

$$\sigma = \frac{M}{I} y = \frac{30000}{10000} \times 7,5 = 22,5 \text{ kg/cm}^2$$

$$T = 600 \text{ kg}$$

$$S = 15 \times 2,5 \times 8,75 = 328 \text{ cm}^3$$

$$\tau = \frac{600 \times 328}{15 \times 10000} = 1,31 \text{ kg/cm}^2$$

Direcţia principală 1 este dată de relaţia :

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma} = \frac{2 \times 1,31}{22,5} = 0,116$$

$$2\alpha = 6^0 40'$$

$$\alpha = 3^0 20'$$

Deci direcţia 1 finală va fi cuprinsă între direcţiile 1' şi 1" şi va avea înclinare de $3^0 20'$ faţă de direcţia 1'.

Vom trasa direcţia 1 din punctul A_1 pînă ce întîlneşte cea de-a doua linie orizontala - determinînd astfel poziţia punctului A_2 (practic A_2 se va afla în aceiaşi secţiune cu A_1 deci vor fi aceleaşi eforturi secţionale ca în A_1) (vezi fig. 186)

$$\sigma = \frac{M}{I} y = \frac{30000}{10000} \times 5 = 15 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau = \frac{T S}{b I} = \frac{600 \times 563}{15 \times 10000} = 1,41 \text{ kg/cm}^2$$

unde $S = 15 \times 5 \times 7,5 = 5,63 \text{ kg/cm}^2$

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2 \times 1,41}{15} = 0,189$$

$$2\alpha = 10^0 40'$$

$$\alpha = 5^0 20'$$

In punctul A_3 aflat şi el foarte apropiat de A_2 avem următoarele eforturi unitare σ şi τ :

$$\sigma = \frac{30000}{10000} \times 2,5 = 7,5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau = \frac{600 \times 702}{15 \times 10000} = 2,82 \text{ kg/cm}^2 \text{ unde } S = 15 \times 7,5 \times 6,25 = 702 \text{ cm}^3$$

Direcţia principala este data de relaţia :

$$tg\ 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma} = \frac{2 \times 2,82}{7,5} = 0,753$$

$$2\alpha = 37^0$$

$$\alpha = 19^0 30'$$

Punctul A_4 se va gasi la o distanţă $x = 2,5\ tg\ \alpha =$ $= 2,5 \times 0,353 = 0,882 \cong 1$ cm, de secţiunea care trece prin punctul A_3

In punctul A_4 avînd eforturi unitare τ ($\sigma = 0$) direcţia principală 1 va fi de 45^0.

Punctul A_5 se va găsi la o distanţa de 2,5 cm de A_4 iar eforturile secţionale şi unitare vor avea valorile :

$M = 600 \times 0,535 = 320$ kg·cm

$T = 600$ kg

$$\sigma = \frac{32000}{10000} \times 2,5 = 8\ kg/cm^2$$

$$\tau = \frac{600 \times 702}{15 \times 10000} = 2,82\ kg/cm^2$$

Direcţia principala 1 este înclinată cu unghiul α faţă de direcţia 1' a cărui valoare o aflam cu relaţia :

$tg\ 2\alpha = \frac{2 \times 2,82}{8,0} = 0,705$ de unde $2\alpha = 35^0 20'$ iar $\alpha = 17^0 40'$

Punctul următor A_6 se va găsi într-o secţiune distanţata de A_5 cu

$$x = \frac{2,5}{tg\ \alpha} = \frac{2,5}{0,32} = 7,8\ cm \simeq 8\ cm$$

Eforturile secţionale şi unitare în punctul A_6 precum şi direcţiile principale vor fi următoarele :

$M = 600 \times 61,5 = 36,800$ kg·cm

$T = 600$ kg

$$\sigma = \frac{36800}{10000} \times 5 = 18,4\ kg/cm^2$$

$$\tau = \frac{600 \times 563}{15 \times 10000} = 1,41\ kg/cm^2$$

$tg\ 2\alpha = \frac{2 \times 1,41}{18,4} = 0,153$ de unde $2\alpha = 8^0 40'$ iar $\alpha = 4^0 20'$

$tg\ \alpha = 0,0757$

Punctul A_7 va fi situat la $x = \frac{2,5}{0,0757} = 33$ cm de punctul anterior A_6, iar eforturile unitare în acest punct vor fi :

$$\sigma = \frac{57600}{10000} \times [illegible] = 40,4\ kg/cm^2$$

50
50
50
32.2
44.0
33.0
22.0
29.0

unde M = 600 x 94,5 = 57600 kg·cm

iar $\sigma = \frac{600 \times 328}{15 \times 10000} = 1,31$ kg/cm^2

tg $2\alpha = \frac{2 \times 1,31}{42,4} = 0,062$ iar $2\alpha = 3^0 30'$ respectiv $\alpha = 1^0 45'$

Distanţa la care ar trebui să se afle punctul A_8' faţă de A_7 :

$x = \frac{2,5}{0,0306} = 81,7$ cm (tg $1^0 45' = 0,0306$)

Constatăm însă că începînd de la secţiunea x = 1,5 m de reazemul din stînga forţa tăietoare fiind nulă, direcţiile principale 1 sînt orizontale, deci punctul următor va fi A_8 (vezi epura), de aici curba direcţiei principale 1 va fi orizontală.

Pentru curba direcţiei principale 1 care porneşte din punctul B_0 vom reda acest calcul, sub forma unui tablou

Punct	M kg/cm	T kg	σ kg/cm^2	τ kg/cm^2	tg 2α	2α	α	tg α	Dist. de la reazem în cm
B_0	600	600	30	0	0	0	0	0	100,0
B_1	600	600	45	1,31	0,058	$3^0 20'$	$1^0 40'$	0,029	100,0
B_2	600	600	30	1,41	0,094	$5^0 20'$	$2^0 40'$	0,048	100,0
B_3	600	600	15	1,42	0,179	$10^0 20'$	$5^0 10'$	0,093	100,0
B_4	603	600	0	3	∞	90^0	45^0	1,000	100,5
B_5	618	600	15,4	2,82	0,367	$20^0 10'$	$10^0 5'$	0,178	103,0
B_6	704	600	35,2	1,41	0,080	$4^0 40'$	$2^0 20'$	0,040	117,0
B_7									150,0

Se poate remarca că punctul B_7 se găseşte în zona forţei tăietoare nule, deci începînd de la punctul B_7 aflat la o distanţă de 33 cm de B_6, direcţia 1 devine orizontală.

In mod simetric se pot trasa traiectoriile direcţiilor eforturilor principale σ_2 pornind din punctele C_0 şi D_0 (simetrice cu A_0 şi B_0).

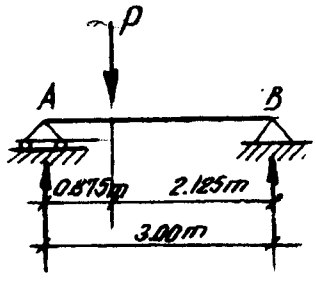


Fig.127

3.7. Se dă grinda simplu rezemată din figură avînd secţiunea tubulară dreptunghiulară închisă din oţel. Se cere :

1.- Cît este valoarea maximă a sarcinii P astfel ca σ max din grindă să fie mai mic decît $\sigma_a = 1400$ kg/cm^2,

2.- Care este repartiţia eforturilor σ şi τ în secţiunea x = 0,5 m.

1.- Valoarea maximă a forţei P va rezulta din egalarea momentului capabil cu momentul încovoietor maxim.

$$I_z = \frac{24 \times 20^3}{12} - \frac{20 \times 18^3}{12} = 16000 - 9700 = 6.300 \text{ cm}^4$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{6.300}{10} = 630 \text{ cm}^3$$

$$M_{cap} = W_z \text{ ef } \sigma a = 630 \times 1400 = 875.000 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$M_{cap} = 8,75 \text{ Tm}$$

$$M_{max} = \frac{P \times 0,875 \times 2,125}{3,00} = 0,633 \text{ P}$$

$$M_{max} = M_{cap}$$

$$8,75 = 0,633 \text{ P}$$

$$P = \frac{8,75}{0,633} = 13,800 \text{ Tm}$$

Reacţiunea din reazemul din stînga va fi :

$$V_A = \frac{13.800 \times 2,125}{3,00} = 10 \text{ T}$$

2.- In secţiune apar eforturile normale unitare σ precum şi eforturile tangenţiale τ orizontale şi verticale.

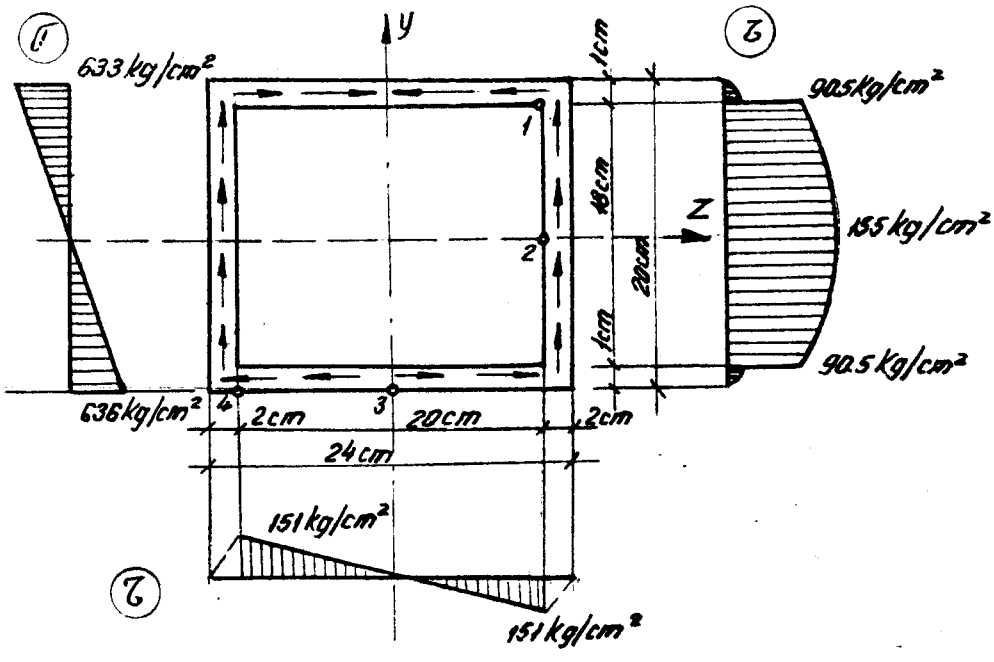


Fig. 188

Eforturile unitare σ au o variaţie liniară.

$$\sigma_{max} = \frac{M_S}{W_Z} = \frac{400.000}{630} = 636 \text{ kg/cm}^2$$

$M = 10 \times 0,4 = 4,00$ Tm

Eforturile unitare tangenţiale verticale au o variaţie parabolică - vom ţine seama numai de cele din pereţii verticali ai secţiunii :

In punctul 1

$$\tau_1 = \frac{10000 \times 228}{4 \times 6300} = 90,5 \text{ kg/cm}^2$$

$T = 10$ t

$S = 24 \times 1 \times 9,5 = 228 \text{ cm}^3$

$b = 2 \times 2 = 4$ cm

$I = 6300 \text{ cm}^4$

In punctul 2

$$\tau_2 = \frac{10000 \times 390}{4 \times 6300} = 155 \text{ kg/cm}^2$$

$S = 228 + 2 \times 2 \times 9 \times 4,5 = 390 \text{ cm}^3$

$b = 4$ cm

$I = 6300 \text{ cm}^4$

Eforturile unitare tangenţiale orizontale τ_o variază linear (S variază linear).

In punctul 3: $\tau_3 = 0$

In punctul 4

$$\tau_4 = \frac{10000 \times 95}{1 \times 6300} = 151 \text{ kg/cm}^2$$

$T = 10$ t

$S = 10 \times 1 \times 9,5 \text{ cm}^2$

$b = 1$ cm

$I = 6300 \text{ cm}^4$

In pereţii verticali ai secţiunii eforturile τ orizontale sînt considerate nule.

5.8. Se dă grinda de lemn compusă din trei elemente (bile) Ø 20, asamblate cu buloane Ø 16 mm (fig.189), pag.136.

Se cere să se stabilească care este distanţa dintre buloane efectuînd calculul după metoda aproximativă şi cîte buloane ar trebui aşezate calculînd după metoda exactă.

Problema care se pune este aceea de a determina ce forţă de lunecare a unei bile faţă de axa neutră z_o ar trebuie să fie preluată de către două buloane.

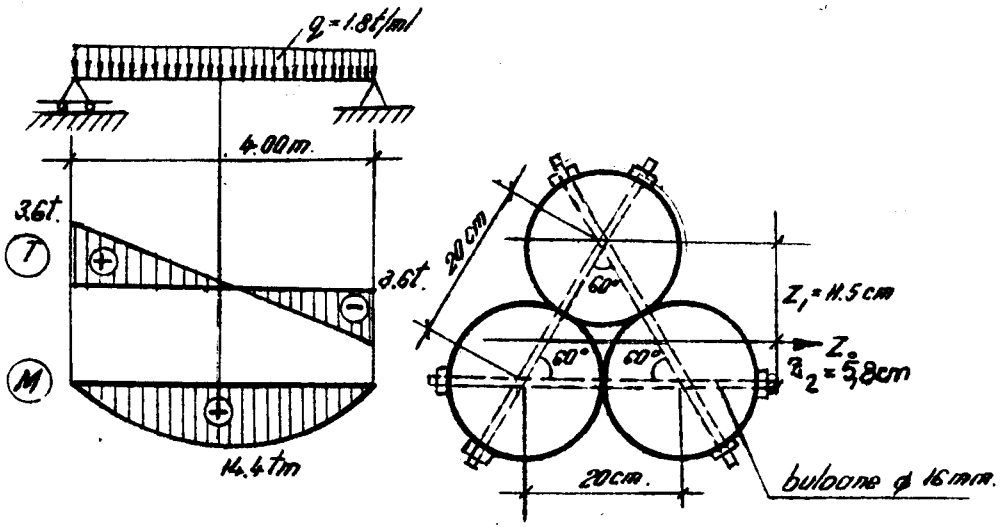


Fig. 189

$$z_1 + z_2 = 20 \sin 60^0 = 20 \times 0{,}865 = 17{,}3 \text{ cm}$$

$$z_1 = \frac{2}{3} 17{,}3 = 11{,}5 \text{ cm}$$

$$z_2 = \frac{1}{3} 17{,}3 \cong 5{,}8 \text{ cm}$$

$$I_{z_o} = 3 \frac{\pi \times 20^4}{64} + \frac{\pi \times 20^2}{4} \cdot 11{,}5^2 + 2 \frac{\pi \times 20^2}{4} \cdot 5{,}8^2 =$$

$$= 23600 + 41400 + 22000 = 87000 \text{ cm}^4$$

Practic şi acoperitor, dacă am pune buloanele la distanţe egale e şi am considera diagrama de forţă tăietoare constantă - $T_x = T_{max}$:

$$L_e = \frac{T_{max} S}{I_{br}} \cdot e = 2 R_{min} \quad \text{de unde: } e = \frac{2 R_{min} \times I_{br}}{T_{max} S}$$

$T_{max} = 3{,}6 \text{ t} = 3600 \text{ kg}$

S - momentul static al secţiunii care "lunecă" respectiv care ar luneca dacă nu ar fi buloanele :

$$S = \frac{\pi . d^2}{4} z_1 = 3\ 14 \times 11{,}5 = 3620 \text{ cm}^3$$

$I_{br} = 87000 \text{ cm}^4$

Buloanele lucrează la forfecare şi strivire.

Rezistenţele unui bulon la forfecare şi strivire a lemnului sînt :

$R_f = 1 \times 2 \times 1120 = 2240$ kg

$R_{st} = 20 \times 1{,}6 \times 100 = 3200$ "

La forfecare rezistă mai slab; deci $R_{min} = 2240$ kg

Distanţa dintre buloane va fi :

$e = \frac{2 \times 2240 \times 87000}{3600 \times 3620} = 29,8$ cm $\simeq 30$ cm. Deci pe o jumătate de grindă sînt necesare 14 buloane.

In mod exact buloanele ar trebui prinse la distanţe neegale astfel ca fiecărui bulon să-i revină aceiaşi forţă de lunecare, deci aceiaşi suprafaţă de diagramă de forţă tăietoare.

Pe o jumătate de grindă forţa de lunecare trebuie să fie preluată de n buloane.

$$L_{1/2} = \int_0^{l/2} \frac{T_x S}{I} dx = \frac{3600 \times 200}{2} \cdot \frac{3620}{87000} = 15000 \text{ kg}$$

$L_{1/2} = n\ R$

$15000 = n \times 2240$

$n = \frac{15000}{2240} = 6,67$ buc $\simeq$ 7 buc.

Distribuţia buloanelor în lungul grinzii se va face cu ajutorul metodei grafice a împărţirii unui triunghi în n părţi egale.

Buloanele se pun în centrul de greutate al acestor suprafeţe de diagrame de forţă tăietoare.

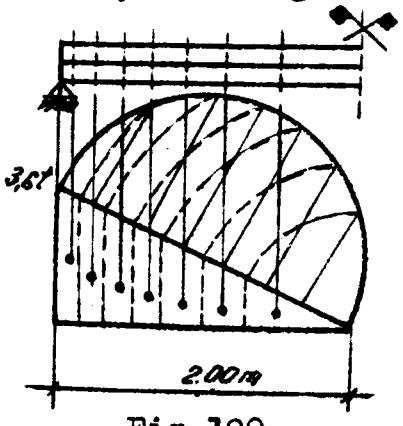


Fig.190

5.9. Se dă grinda din lemn, avînd forma şi secţiunea din figura 191.

1.- Se cere valoarea maximă a forţei P care se poate aşeza pe grindă.

2.- Numărul de scoabe Ø 10 care sînt necesare pentru solidarizarea celor 2 elemente.

$\sigma_a$îi= 100 kg/cm^2

1.- Valoarea maximă a forţei P reiese din relaţia de egalitate a momentului încovoietor maxim cu momentul capabil al secţiunii.

In cazul nostru momentul capabil este variabil şi anume pe porţiunea A-B este M'_{cap}, iar pe zona BC este M'_{cap}.

$$M'_{cap} = W'_{ef} \cdot \sigma_a = \frac{15 \times 30^2}{6} \times 100 = 225.000 \text{ kg.cm}$$

$$M''_{cap} = W''_{ef}\ \sigma_a = \frac{15 \times 15^2}{6} \times 100 = 56.200 \text{ kg.cm}$$

Pe zona A-B momentul încovoietor maxim are valoarea $\frac{3Pl}{}$

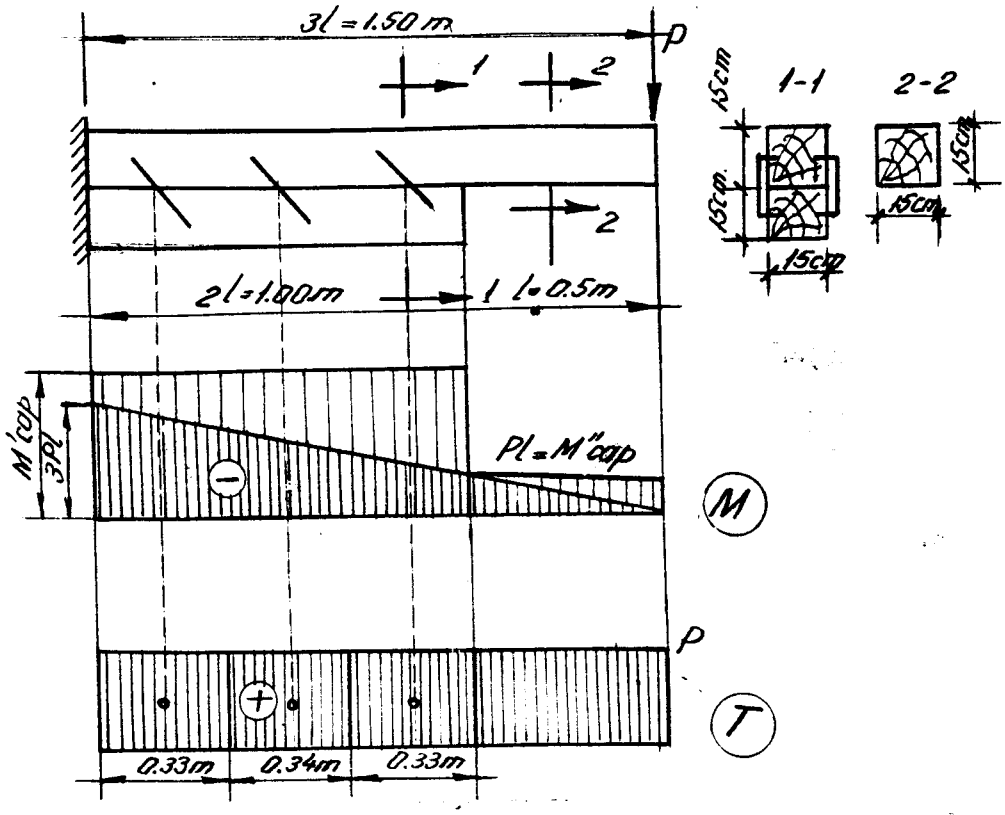


Fig. 191

$M'_{max} = M_A = (150\ P)$ kg·cm

iar pe porţiunea BC momentul încovoietor maxim are valoarea Pl

$M''_{max} = M_B\ (50\ P)$ kg·cm

Vom putea scrie că la limită

$M'_{cap} = M'_{max}$ şi $M''_{cap} = M''_{max}$

225.000 = 150 P de unde P = 1500 kg

56.200 = 50 P de unde P = 1124 kg

Deci valoarea maximă a sarcinii P care poate fi pusă pe grindă în aşa fel încît să reziste şi pe porţiunea AB şi pe BC este valoarea cea mai mică şi anume P_{max} = 1124 kg.

2.- Scoabele trebuie să preia lunecarea dintre cele două grinzi pe zona AB prin întindere.

$$L_{21} = \frac{T\ S}{I}\ 21 = n.\ \frac{\pi d^2}{4}\sigma a.\ \cos 45^\circ$$

unde $T = T_{max} = 1124$ kg

$S\ 15 \times 15 \times 7{,}5 = 1690\ cm^3$

$$I = \frac{15 \times 30^3}{12} = 33.800\ cm^4$$

$\cos 45^\circ = 0{,}707$

$2\ 1 = 100$ cm

$$n = \frac{T\ S\ 21}{I\ \frac{\pi d^2}{4} \cdot \sigma_a \cos 45^0} = \frac{1124 \times 1690 \times 100}{33.800.0,78x1400x0,707} = 5,7 \simeq 6 \text{ buc}$$

Punem 3 rînduri de cîte 2 scoabe în centrele de greutate ale suprafeţelor de forţă tăietoare - în aşa fel încît fiecare din scoabe să preia aceiaşi lunecare.

5.10. Se dă grinda din figură, compusă din 2 profile sudate încărcate ca în figură. Se cere :

1. Determinarea valorii a lui q
2. Să se calculeze cordoanele de sudură
3. Să se calculeze forţa de lunecare pe întreaga grindă dintre cele două profile (exaçt şi aproximativ).

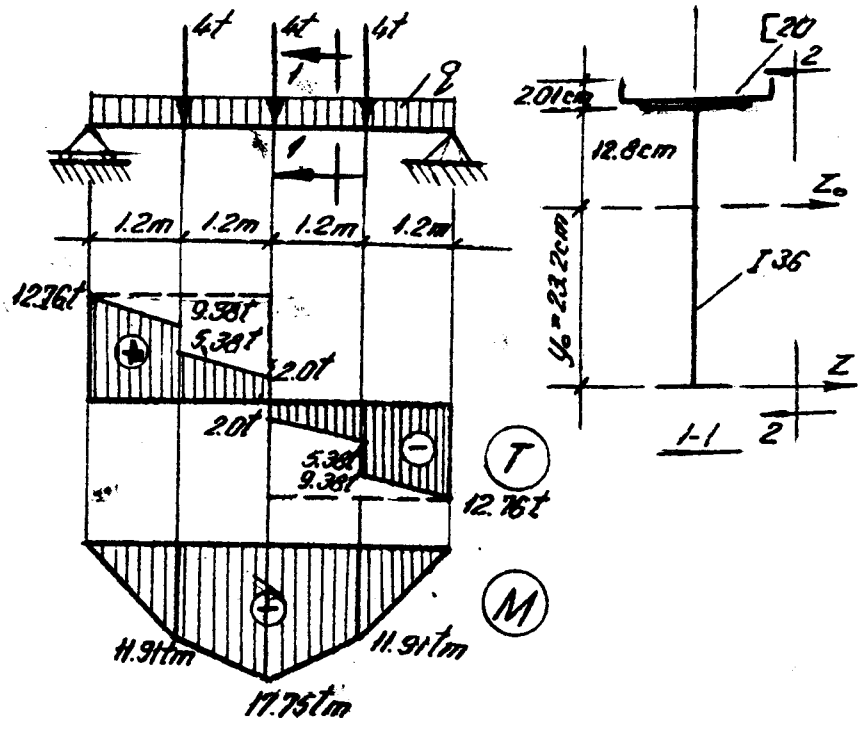


Fig. 192

1. Valoarea maximă a lui q va rezulta din egalarea momentului încovoietor maxim cu momentul capabil al secţiunii din figură.

Momentul încovoietor maxim este dat de relaţia :

$$M_{max} = 6 \times 2,4 - 4 \times 1,2 + q \frac{4,8^2}{8} = (9,6 + 2,88\ q)\ Tm$$

Pentru calcularea momentului capabil avem nevoie de W_{z_o} respectiv I_{z_o} şi centrul de greutate.

Vom extrage elementele geometrice ale secţiunilor din tabele :

	A	I_x	I_y	e
I 36	97,1	19610	818	-
U 20	32,2	1910	148	2,01

Centrul de greutate al ansamblului este dat de :

$$y_o = \frac{32,2 \times 38,01 + 97,1 \times 18}{32,2 + 97,1} = \frac{2980,0}{129,3} = 23,2 \text{ cm}$$

$I_{z_o} = 148 + 32,2 \times 14,81^2 + 19610 + 97,1 \times 5,2^2 = 29.480 \text{ cm}^4$

$W_{z_o} = \frac{I_{z_o}}{y_{max}} = \frac{29.480}{23,2} = 1270 \text{ cm}^3$

$M_{cap} = W_{z_o} \times \sigma a = 1270 \times 1400 = 1.775.000 \text{ kg.cm} = 17,55 \text{ Tm}$

Scriind că : $M_{max} = M_{cap}$

adică $9,6 + 2,88\ q = 17,55$

rezultă $q = \frac{17,175 - 9,6}{2,88} = \frac{8,15}{2,88} = 2,82 \text{ Tml}$

2.- Cordoanele de sudură discontinui se calculează în general astfel :

Lunecarea pe distanţa e revine la cordoane de sudură de lungime l_c (se propune $a_{min} = 4$ mm).

$$L_e = \int_x^{x+e} \frac{T_x S}{I} dx \leq 2\ a\ l_c\ \tau_{as}$$

2-2

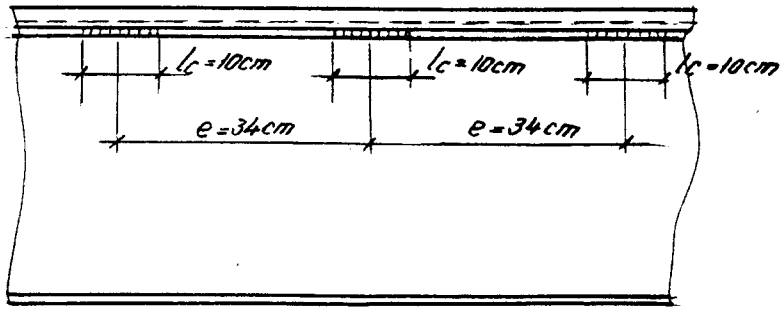


Fig. 193

Considerînd că sudura se face identică pe toată lungimea grinzii (la aceleaşi distanţe şi cu aceleaşi dimensiuni) - vom dimensiona cordoanele de sudură la $T_{max} = 12,76$ T.

Deci $\frac{S\ T_{max}}{I}\ e = 2\ a\ l_c\ \tau_{as}$

$$\frac{e}{l_c} = \frac{2\ a\ I\ \tau_{as}}{S\ T_{max}} = \frac{2 \times 0,4 \times 29,480 \times 910}{494 \times 12.760} = 3,42$$

a = 0,4 cm

$I = 29.480 \text{ cm}^4$

$\tau_{as} = 0,65 \cdot \sigma a = 910 \text{ kg/cm}^2$

S momentul static al secţiunii care "lunecă" - respectiv ar luneca dacă nu ar exista cordoanele de sudură.

S = 97,1 x 5,2 + 32,2 x 14,81 = 494 cm^3

T_{max} = 12.760 kg

Alegem l_c între (5-10) cm - respectiv 10 cm

Atunci e = 34,2 cm $\simeq$ 34 cm

$l_t = l_c + 2\,a = 10 + 2 \times 0{,}4 = 10{,}8 \simeq 11$ cm

In consecinţă vom avea 11 cm cu sudură - 23 cm fără sudură - din nou 11 cm sudură şi din nou 23 cm fără sudură, ş. a. m. d.

3.- Forţa de lunecare după metoda aproximativă se calcalculează : $L_e = \frac{T_{max}\,S}{I}\,e$

în cazul nostru $L_{o-480} = \frac{12760 \times 494}{29480}\,480 = 103.000$ kg

După metoda exactă

$$L_e = \frac{S}{I}\int_0^{480} T_x\,dx \quad \text{sau} \quad L_e = \frac{S}{I}\int_o \Delta M$$

$$\int_0^{4.8} T\,dx = 2\left[\frac{12760+9380}{2} \times 120 + \frac{9380+2000}{2} \times 120\right] = 3550000 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$\Delta M = (M_{max} - M_1) + (M_{max} - M_2) = 17{,}75 + 17{,}75 = 35{,}5$ Tm

Ca observaţie : $\int T\,dx$ se ia în sens absolut deoarece chiar dacă lunecarea are loc în două sensuri - ambele lunecări trebuiesc preluate iar Δ M care în mod obişnuit este $M_2 - M_1$ în cazul cînd între secţiunile 1 şi 2 avem M_{max} (ca în cazul de mai sus), expresia ΔM devine $\Delta M = (M_{max} - M_1) + (M_{max} - M_2)$.

$L_e = \frac{494}{29.480}\,3.550.000 = 59.700$ kg

Se vede deci că deosebirea este de la simplu la dublu, întrucît metoda exactă utilizează diagrama reală de forţă tăietoare pe cînd metoda aproximativă - practică - lucrează cu forţa tăietoare maximă - constantă (diagrama punctată).

5.11. Se dă grinda metalică supusă la încovoiere avînd secţiunea I 24. (fig.194).

1. Se cere care este raportul dintre modulele de rezistenţă W elastic şi W plastic.

2. Se cere apoi acelaş lucru pentru o secţiune compusă dintr-o jumătate de I 24.

1. In primul caz :

$W_e = 354$ cm^3 - se scoate din tabel.

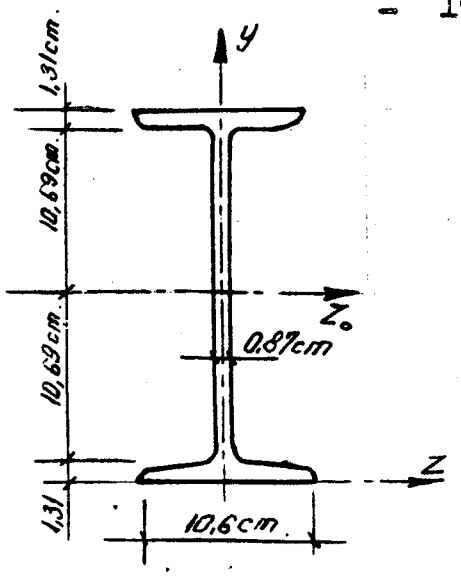


Fig. 194

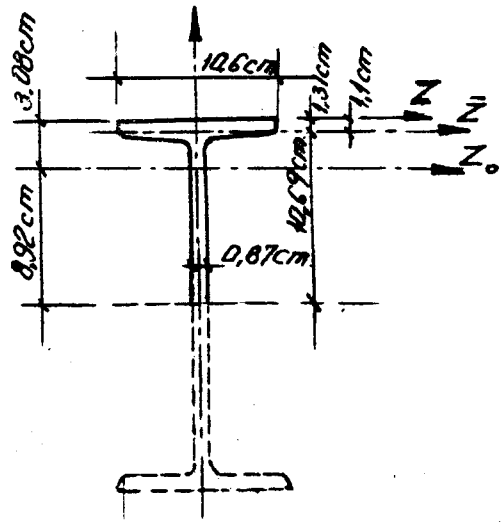


Fig. 195

Modulul de rezistenţa plastic reprezintă suma momentelor statice a zonei comprimate şi a celei întinse în raport cu axa neutră.

$$W_p = (S_1+S_2) = 2\,S_o = 2 \cdot 206,7 = 413,4\ cm^3$$

$$S_o = 10,6x1,31x11,34 + 0,87x10,69x5,34 = 206,7\ cm^3$$

$$\frac{W_p}{W_e} = \frac{413,4}{354} = 1,17$$

Axele neutre coincid după ambele metode

2. In cazul celei de a doua variante pentru găsirea modulului de rezistenţă elastic W_{z_o} e necesar să calculăm centrul de greutate şi momentul de inerţie I_{z_o} (fig. 195).

$$y_o = \frac{10,6x1,31x0,66 + 10,69x0,87x6,66}{10,6x1,31 + 10,69x0,87} = \frac{71,2}{23,2} = 3,08\ cm$$

$$I_{z_o} = \frac{10,6x1,31^3}{12} + 10,6x1,31x2,43^2 + \frac{0,87x10,69^3}{12} +$$

$$+ 0,87 \times 10,69 \times 3,57^2 = 199\ cm^4$$

$$W_{z_o\ e} = \frac{199}{8,92} = 22,3\ cm^3$$

Pentru găsirea axei neutre după metoda plastică egalăm suprafeţele de întindere şi compresiune (notăm axa neutră $\bar{z}_o$)

$$10,6 \times \bar{z} = (1,31 - \bar{z})\ 10,6 + 10,69 \times 0,87$$

$$21,2\ \bar{z} = 13,9 + 9,3$$

$$\bar{z} = \frac{23,2}{21,2} = 1,1\ cm$$

$$W_p = (S_1 + S_2)$$

$$S_1 = 1,1 \times 10,6 \times 0,55 = 6,4\ cm^3$$

$$S_2 = 0,21 \times 10,6 \times 0,11 + 10,69 \times 0,87 \times 5,56 = 52\ cm^3$$

rp

$$W_p = (S_1 + S_2) = 58,4 \text{ cm}^3$$

$$\frac{W_p}{W_e} = \frac{58,4}{22,3} = 2,62$$

Diferența dintre primul caz cînd raportul $\frac{W_p}{W_e} = 1,17$ este cel de al doilea cînd raportul 2,62 se explică prin aceea că în prima variantă tălpile (mult material) erau situate la distanță mare de axa neutră deci lucrau cu σ_{max} după metoda elastică, pe cînd în cel de al doilea caz, secțiunea este nesimetrică, axa neutră este foarte aproape de talpă - care lucrează după metoda elastică foarte neeconomic - în timp ce după principiul metodei plastice toate punctele secțiunii sînt solicitate la maximum.

5.12. Se dă grinda metalică din figură. Se cere :

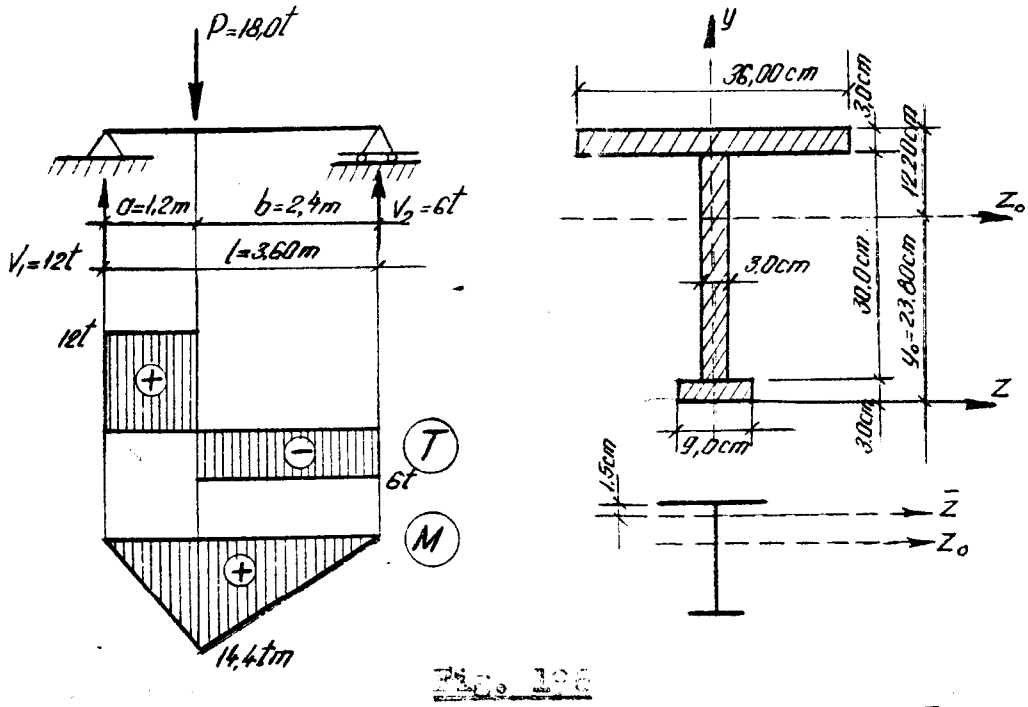


Fig. 126

1.- Să se determine distribuția eforturilor σ și τ în secțiunea x = 1,0 m

2.- Care este P_{max} care se poate aplica pe grindă, efectuînd calculul după metoda elastică și metoda plastică.

1. Pentru determinarea eforturilor σ aplicăm formula lui Navier

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y \text{ iar pentru } \tau \text{ formula lui Juravski } \tau = \frac{T_z S}{b I_z}$$

Eforturile secționale sînt:

$M_z = 12 \times 1,0 = 12$ tm

$T_z = 12$ t

Poziţia centrului de greutate e data de :

$$z_o = \frac{36 \times 3 \times 34,5 + 30 \times 3 \times 18 + 9 \times 3 \times 1,5}{36 \times 3 + 3 \times 30 + 9 \times 3} = \frac{5380,5}{225} = 23,8 \text{ cm}$$

Momentul de inerţie devine :

$$I_{z_o} = \frac{36 \times 3^3}{12} + 36 \times 3 \times 10,7^2 + \frac{3 \times 30^3}{12} + 3 \times 30 \times 5,8^2 +$$

$$+ \frac{9 \times 3^3}{12} + 9 \times 3 \times 22,3^2 = 35.671 \text{ cm}^4$$

Pentru determinarea diagramei eforturilor unitare normale vom calcula σ în punctele 0 şi 6 :

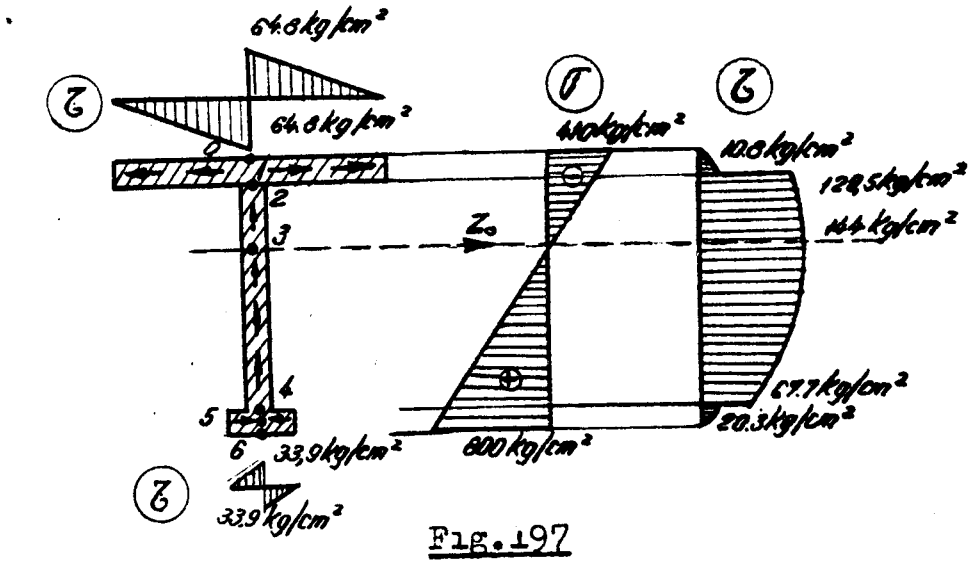


Fig.197

$$\sigma_o = \frac{1200000}{35671} \cdot 12,2 = 410 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_6 = \frac{1200000}{35671} \cdot 23,8 = 800 \text{ kg/cm}^2$$

Pentru determinarea diagramei eforturilor unitare tangenţiale τ verticale (variaţia lor fiind parabolică) le vom calcula în puncte caracteristice:

$$\tau_{ov} = 0$$

$$\tau_{1v} = \frac{T S_1}{b I_z} = \frac{12000 \times 1155}{36 \times 35671} = 10,8 \text{ kg/cm}^2$$

$$S_1 = S_2 = 3 \times 36 \times 10,7 = 1155 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{2v} = \frac{12000 \times 1155}{3 \times 35671} = 129,5 \text{ kg/cm}^2$$

$$S_3 = 1155 + 9,2 \times 3 \times 4,6 = 1282 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{3V} = \frac{12000 \times 1282}{3 \times 35671} = 144 \text{ kg/cm}^2$$

$$S_4 = S_5 = 3 \times 22,3 = 603 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{4V} = \frac{12000 \times 603}{3 \times 35671} = 67,7 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{5V} = \frac{12000 \times 603}{9 \times 35671} = 20,30 \text{ kg/cm}^2$$

$\tau_{6V} = 0$

Eforturile unitare τ_v din talpa se pot neglija intrucit valorile lor sînt mici.
Nu le vom neglija însă pe cele orizontale din talpa.

Eforturile unitare tangenţiale orizontale τ_o din talpă vor avea sensul din figură şi o variaţie liniara.

$$\tau_{10} = \frac{12000 \times 577,5}{3 \times 35.671} = 64,8 \text{ kg/cm}^2$$

$$S_1 = \frac{1155}{2} = 577,5 \text{ cm}^3$$

Suprafaţa care "lunecă" este tocmai jumătatea tălpii, deci momentul static va fi 1/2 din momentul static calculat pentru punctele 1, 2 şi 4,5 pentru eforturile unitare τ_v verticale, iar lăţimea este grosimea tălpii care este de 3 cm ca şi grosimea inimii.

$$\tau_{50} = \frac{12000 \times 301,5}{3 \times 35.671} = 33,9 \text{ kg/cm}^2$$

2.- a) Dupa metoda elastică valoarea forţei P_{max} va reeşi din relaţia ca momentul capabil al grinzii să fie egal la limită cu momentul încovoietor maxim.

$$M_{cap.} = W_{z\,ef.} \cdot \sigma_a$$

$$W_{ef_z} = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{35,671}{23,6} = 1510 \text{ cm}^3$$

$$M_{cap.} = 1510 \times 1400 = 2120000 \text{ kg} = 21,2 \text{ Tm}$$

$$M_{max} = \frac{P\,ab}{l} = \frac{P \times 1,2 \times 2,4}{3,6} = (0,8\,P) \text{ Tm}$$

Scriind că $M_{max} = M_{cap}$ vom putea determina valoarea maxima a forţei P.

$0,8\,P = 21,2$

$P_{max} = 26,6$ T

b). După metoda plastică momentul capabil al secţiunii se determina cu formula :

$M'_{cap} = W_{pl} \sigma_a = (S_1 + S_2) \sigma_a$ unde S_1 şi S_2 sînt momentele statice ale secţiunii întinse şi comprimate în raport cu axa neutră, Axa neutră se determină din relaţia ca suprafaţa comprimată să fie egală cu suprafaţa întinsă.

$$36 \times 3 + 3 \bar{z} = (30 - \bar{z}) 3 + 9 \times 3$$

$$\bar{z} = 1{,}5 \text{ cm}$$

$$S_1 = 36 \times 3 \times 3 + 3 \times 1{,}5 \times 0{,}75 = 327{,}4 \text{ cm}^3$$

$$S_2 = 9 \times 3 \times 30 + 3 \times 28{,}5 \times 14{,}25 = 2020 \text{ cm}^3$$

$$M'_{cap} = (327{,}4 + 2020)\ 1400 = 3.270.000 \text{ kgm} = 32{,}7 \text{ Tm}$$

Forţa P' se determină din acelaşi relaţie ca la metoda precedentă,

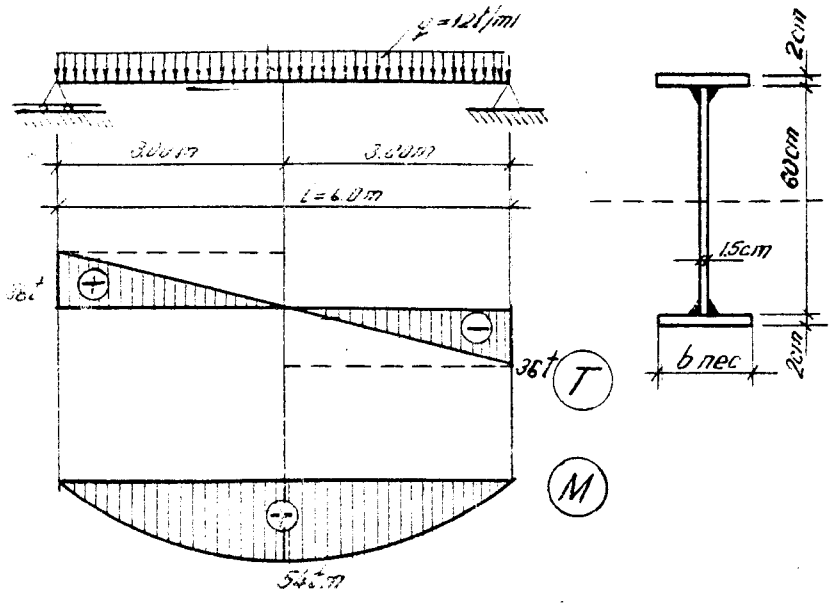
$$M_{max} = \frac{P' ab}{l} = (0{,}6\ P')\ l$$

$$0{,}6\ P' = 54{,}7$$

$$P'_{max} = 33{,}6 \text{ T}$$

Se observă că forţa maximă după metoda plastică a crescut mult (circa 50%) faţă de aceea calculată după metoda elastică din cauza secţiunii nesimetrice a grinzii şi anume după metoda elastică talpa superioară lucrează cu σ foarte redus, pe cînd după metoda plastică toate punctele secţiunii lucrează în condiţii optime.

5.15. Grinda din figură are o secţiune de grindă cu inimă plină sudată.



1.- Lăţimea necesară b a platbandei.

2.- Care este lungimea totală de calcul a cordoanelor de sudură pentru grinda întreagă după metoda exactă şi aproximativă.

1. Trasăm diagramele T şi M pentru grinda din figură

$V_1 = V_2 = 36$ T

$$M_{max} = \frac{q l^2}{8} = \frac{12 \times 6^2}{8} = 54 \text{ tm}$$

Lăţimea b a tălăilor grinzii cu inimă plină, din problemă, se calculează din condiţia egalării momentului încovoietor maxim cu momentul capabil al secţiunii care este o funcţie de b.

$$I_z = \frac{1,5x60^3}{12} + 2\left(\frac{bx2^3}{12} + bx2x31^2\right) = 27.000 + 3840\ b$$

termenul $\frac{b \times 2^3}{12}$ îl neglijăm

$$W_z = \frac{27.000 + 3840\ b}{32} = 843 + 120\ b$$

$M_{cap} = W_z \times \sigma_a = (843+120\ b)1400 = (1180000+168000\ b)$

$M_{max} = 54$ tm $= 5.400.000$ kg.cm

Din egalarea lor rezultă

$$b = \frac{5.400.000 - 1.180.000}{168.000} = 25 \text{ cm}$$

$I_z = 27000 + 3840 \times 25 = 123.000 \text{ cm}^4$

Forţa de lunecare pe întreaga grindă este dată de formulele :

$L_1 = \frac{S}{I} \int_0^l T\,dx$ - după metoda exactă

$L_1 = \frac{S}{I} \Delta M$ unde $\Delta M = (M_{max} - M_1) + (M_{max} - M_2)$

$L_1 = \frac{S}{I} T_{max}$ e - după metoda aproximativă

$S = 2 \times 25 \times 31 = 1550 \text{ cm}^3$

După metoda exactă :

$$L_e = \frac{1550}{123000} 2 \left(\frac{36.000 \times 300}{2}\right) = \frac{1550}{123000} 2x5.400.000 = 136.000 \text{ kg}$$

După metoda aproximativă lunecărea este :

$$L_1 = \frac{1550}{123.000} \cdot 36000 \times 6 = 272.000 \text{ kg.}$$

Se vede că forţa de lunecare după metoda exactă e jumătate ca valoare din cea calculată aproximativ - întrucît diagrama reală a forţei tăietoare e triunghiulară ori noi practic o asimilăm cu una dreptunghiulară (vezi diagrama punctată a forţei tăietoare).

2. Forţa de lunecare trebuie să fie preluate de 2 serii de cordoane de sudură a căror lungime totală de calcul se determină cu formula :

$$L_l = 2\ a\ L_o\ \tau\ as$$

$a = 0,4$ cm

După metoda exactă

$$L_l = \frac{126.000}{2x0,4x0,10} = 186 \text{ cm}$$

După metoda aproximativă

$$L_l = \frac{272,000}{2x0,4x0,10} = 572 \text{ cm}$$

5.14.- Se dă o grindă cu inimă plină sudată încărcată ca în figură. Se cere verificarea eforturilui unitar normal maxim σ_{max} şi tangenţial maxim τ_{max}, precum şi stabilirea distanţei e dintre cordoanele de sudură (de ambele tipuri) şi a lungimii lor (Δ = 4 mm). In ce secţiune s-ar putea renunţa la platbandele de la extremităţi.(fig.199).

Eforturile unitare maxime se calculează cu formulele:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z}$$

$M_{max} = 40 \times 2,0 = 80$ Tm

$$I_z = \frac{1,2x80^3}{12} + 2\left(\frac{45x1,5^3}{12} + 45x1,5x40,75^2\right) + 2\left(\frac{20x1^3}{12} + 20 \times 1 \times 42^2\right) = 245.000 \text{ cm}^4$$

$$W_z = \frac{245.000}{42,5} = 5770 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{max} = \frac{8.000.000}{5770} = 1390 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}\ S_{max}}{b\ I_z}$$

$T_{max} = 40$ t

$S_{max} = 1 \times 20x42 + 1,5x25x40,75 + 1x40x20 = 3170 \text{ cm}^3$

$b = 1,2$ cm

$I_z = 245.000 \text{ cm}^4$

$$\tau_{max} = \frac{40.000 \times 3170}{245.000 \times 1,2} = 432 \text{ kg/cm}^2$$

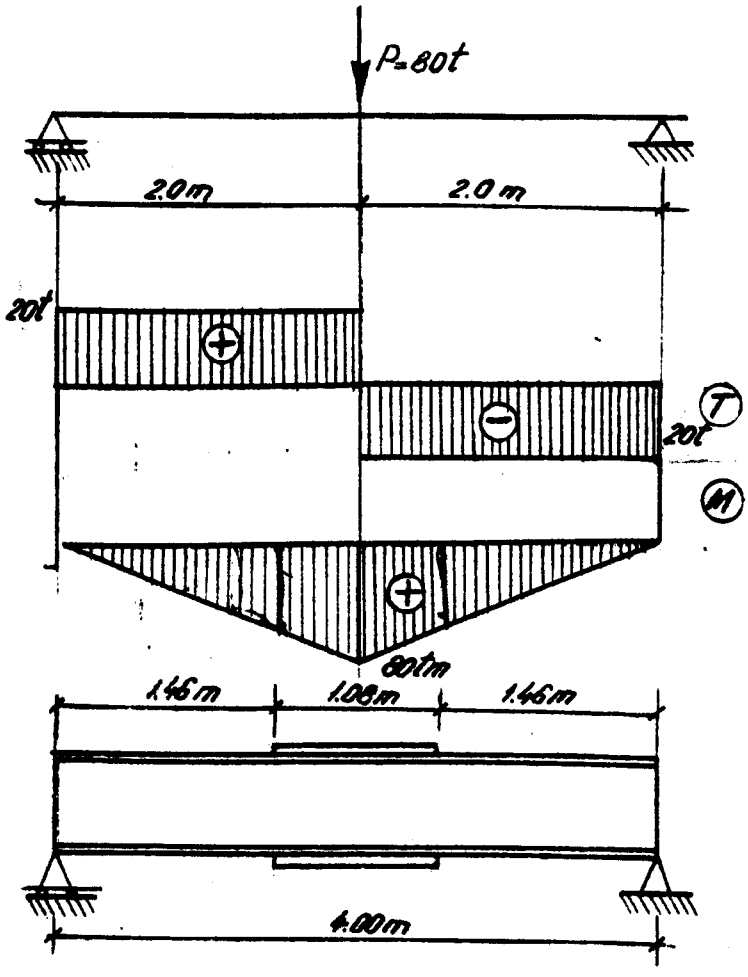


Fig. 199

Pentru calculul distanţelor e dintre cordoanele de sudură vom scrie că lunecarea pe distanţa e trebuie să fie preluată de către două cordoane de lungime l (singurul lucru care diferă de calculul celor două tipuri de cordoane este momentul static al secţiunii care lunecă).

$\frac{T_{max} S}{I} e = 2 a l \tau_{as}$

Pentru cordoanele 1

$S_1 = 1 \times 20 \times 42 = 840$ cm

Iar pentru cordoanele 2

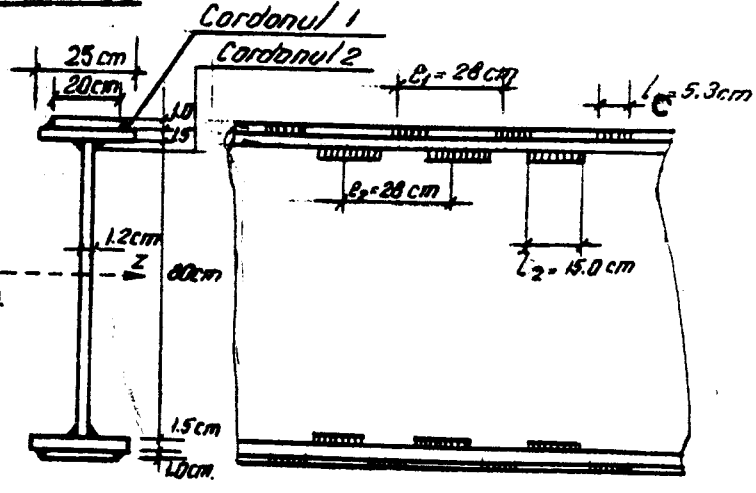


Fig. 200

$S_2 = 1 \times 20 \times 42 + 1,5 \times 25 \times 40,75 = 2370$ cm^3

$$\frac{e_1}{l_1} = \frac{2 \times 0,4 \times 245.000 \times 910}{40000 \times 840} = 5,3 \qquad e_1 = 5,3\, l_1$$

Similar: $e_2 = 1{,}88 l_2$

Ne propunem $l_2 = 15$ cm; rezultă $e_2 = 28{,}2$ cm $\simeq 28$ cm

Dacă şi primele cordoane le punem la aceiaşi distanţă, lugimile lor rezultă diferite.

$$l_1 = \frac{28}{5{,}3} = 5{,}28 \simeq 5{,}3$$

Trebuie menţionat că lungimile l_1 şi l_2 sînt lungimile de calcul a cordoanelor de sudură. Pentru a calcula lungimile totale $l_1 t$ şi $l_2 t$ trebuie să adunăm fiecare "2 a". Astfel :

$$l_1 t = 5{,}3 + 2 \times 0{,}4 = 6{,}1 \simeq 7 \text{ cm}$$

$$l_2 t = 15{,}0 + 2 \times 0{,}4 = 15{,}8 \simeq 16 \text{ cm}$$

Pentru a determina unde este suficient numai un singur rînd de platbande trebuie să calculăm care este momentul capabil al secţiei respective şi egalizîndu-l cu expresia curentă a momentului încovoietor să calculăm pînă unde secţiunea cu un singur rînd de platbande este suficientă.

$$M_{cap} = W_{z1} \times \sigma_a$$

$$I_{z_1} = \frac{1{,}2 \times 80^3}{12} + 2\left(\frac{25 \times 1{,}5^3}{12} + 25 \times 15 \times 40{,}75^2\right) = 174.200 \text{ cm}^4$$

$$W_{z_1} = \frac{174.200}{41{,}5} = 4180 \text{ cm}^3$$

$$M_{cap} = 4180 \times 1400 = 5830000 \text{ kg} \cdot \text{cm} = 58{,}5 \text{ Tm}$$

Momentul încovoietor în secţiunea curentă x, este :

$$M_x = 40\ x$$

$$40 \cdot x = 58{,}3$$

$$x = \frac{58{,}3}{40} = 1{,}46 \text{ m}$$

Deci începînd de la distanţa de 1,46 m de la reazem sînt neçesare două rînduri de platbandă.

5.15. Se dă grinda din figură. (fig. 201)

1.- Să se verifice σ_{max} şi τ_{max}.

2.- Se cere distanţa e' şi e'' dintre niturile de cap şi de gît.

3.- Se cere σ şi τ în punctul S (x = 2,00 m şi y = 20 cm sub axa neutră) precum şi direcţiile şi eforturile principale, utilizînd metodele grafică şi analitică.

4.- Să se calculeze secţiunile unde nu mai sînt necesare platbandele.

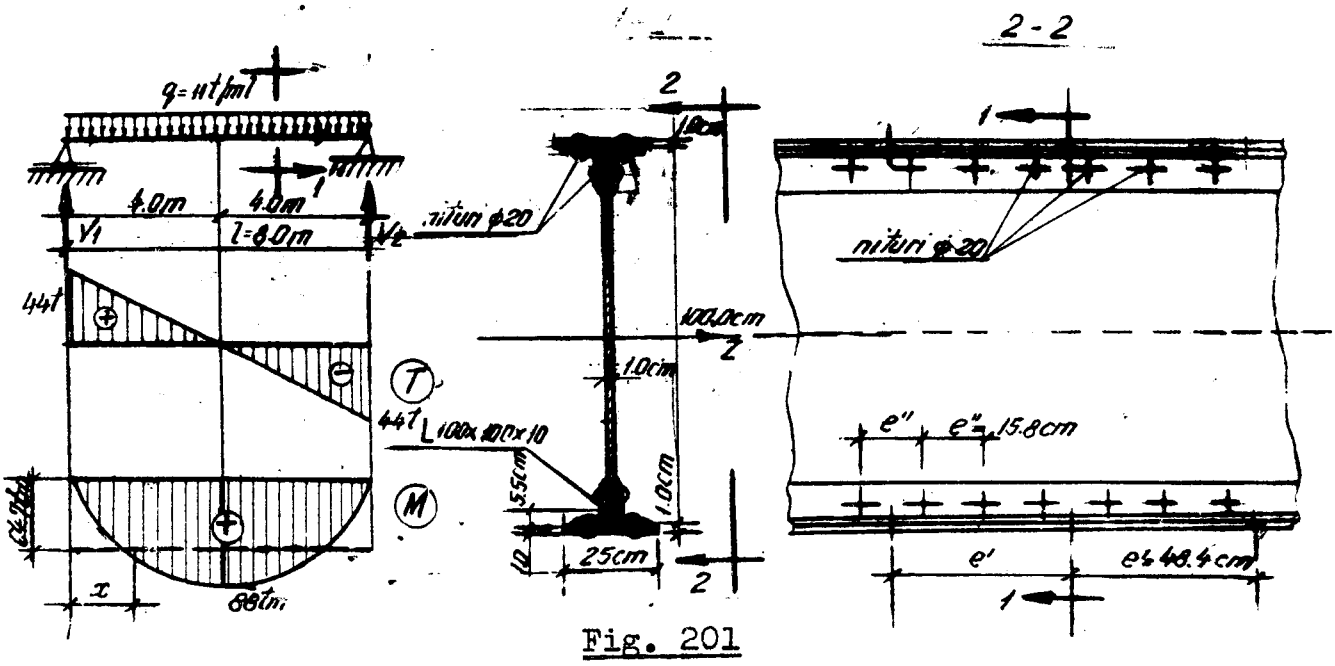


Fig. 201

$$T_{max} = V_1 = 44 \text{ T}$$

$$M_{max} = \frac{11 \times 8^2}{8} = 88 \text{ Tm}$$

1.- Pentru a calcula eforturile unitare σ şi τ - maxime vom aplica formulele :

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_{z\ net}}$$

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}\ S_{max}}{b\ I_{brut}}$$

$$I_{z\ brut} = \frac{1 \times 100^3}{12} + 4\ (177 + 19{,}2 \times 47{,}18^2) + 2\ (\frac{25 \times 1^3}{12} + 25 \times 1 \times 50{,}5^2) = 382.000 \text{ cm}^4$$

Slăbirile date de niturile de cap(sect a-a) sînt :

$$\Delta I = 4\ (\frac{2 \times 2^3}{12} + 2 \times 2 \times 50^2) = 40.000 \text{ cm}^4$$

$$I_{z\ net} = I_{brut} - I = 382.000 - 40000 = 342.000 \text{ cm}^4$$

$$W_{z\ net} = \frac{I_{z\ net}}{y_{max}} = \frac{342000}{51} = 6700 \text{ cm}^3$$

$$S_{max} = 25 \times 1 \times 50{,}5 + 2 \times 19{,}2 \times 47{,}18 + 50 \times 1 \times 25 = 4330 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{max} = \frac{8800000}{6700} = 1315 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{max} = \frac{44000 \times 4330}{10 \times 382000} = 500 \text{ kg/cm}^2$$

Pentru a calcula distanța e' dintre niturile de cap, scriem ca lunecarea pe distanța e' trebuie preluată de două nituri.

$$Le' = \frac{T_{max} S}{I_{br}} e' \leqslant 2 R_{min} \qquad e' = \frac{2 R_{min} I_{br}}{T_{max} S}$$

$T_{max} = 44 \text{ t} = 44000 \text{ kg}$

$S = 25 \times 1 \times 50,5 = 1262 \text{ cm}^3$ - lunecă numai platbanda

$I_{br} = 382.000 \text{ cm}^4$

$R_f = 1. \frac{\pi 2^2}{4} . 1120 = 3520 \text{ kg}$

$R_p = 2 \times 1 \times 2800 = 5600 \text{ kg}$

$$e' = \frac{2 \times 3520 \times 382.000}{44.000 \times 1262} = 48,4 \text{ cm}$$

Pentru niturile de gît vom avea o relație asemănătoare și anume, că lunecarea pe distanța e" trebuie preluată de un singur nit de gît.

$$Le'' = \frac{T_{max} S}{I_{br}} e'' \leqslant R_{min} \qquad e'' = \frac{R_{min} I_{br}}{T_{max} S}$$

$S = 25 \times 1 \times 50,5 + 2 \times 19,2 \times 47,18 = 1262 + 1818 = 3080 \text{ cm}^3$

- de această dată lunecă și platbanda și cele două cornpiere legate solidar cu platbanda prin niturile de cap.

$$R_f = 2 \times \frac{\pi 2^2}{4} . 1120 = 7040 \text{ kg}$$

$R_p = 2 \times 1 \times 2800 = 5600 \text{ kg}$

$$e'' = \frac{5600 \times 382000}{44000 \times 3080} = 15,8 \text{ cm}$$

3.- Pentru calcularea eforturilor unitare σ și τ, aplicăm formulele lui Navier și Juravski :

$$\sigma_{max} = \frac{M}{I_{neb}} y$$

$$\tau = \frac{T S_{br}}{b I_{br}}$$

$M = 44 \times 2 - 11 \times 2 \times 1 = 88 - 22 = 66 \text{ Tm}$

$T = 44 - 2 \times 11 = 22 \text{ t}$

$S_{br} = 25 \times 1 \times 50,5 + 2 \times 19,2 \times 47,18 + 1 \times 30 \times 35 = 4130 \text{ cm}^3$

$$\sigma_s = \frac{6600.000}{342.000} \times 20 = 386 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_s = \frac{22.000 \times 4130}{1 \times 382.000} = 238 \text{ kg/cm}^2$$

- Calculul analitic al direcţiilor şi eforturilor unitare principale

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma} = \frac{476}{386} = 1,23$$

$$90^0 - 2\alpha = 39^0$$

$$2\alpha = 51^0$$

$$\alpha = 25^0 30'$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{386}{2} \pm \frac{100}{2}\sqrt{3,86^2 + 4 \times 2,38^2} = 193 \pm \frac{100}{2} 6,14$$

$$= 193 \pm 307 = \begin{cases} \sigma_1 = 500 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_2 = -114 \text{ kg/cm}^2 \end{cases}$$

Calculul grafic al direcţiilor şi eforturilor unitare principale se face cu ajutorul cercului lui Mohr.

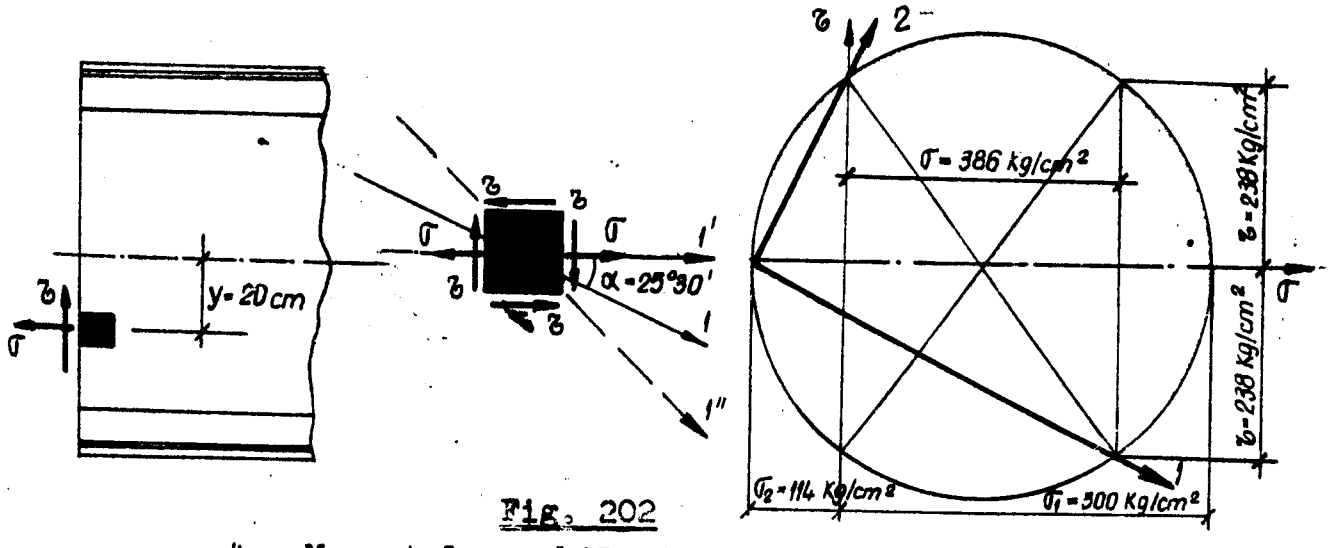


Fig. 202

4.- Momentul capabil al secţiunii este următorul:

$$I_{1\,z\,br} = \frac{1 \times 100^3}{12} + 4\,(177 + 19,2 \times 47,18^2) = 254.400 \text{ cm}^4$$

$$\Delta I_{z_1} = 2\left(\frac{3 \times 2^3}{12} + 3 \times 2 \times 44,5^2\right) = 23700 \text{ cm}^4$$

$$I_1{}^z \text{ net} = I_1{}^z \text{ net} = I_{1\,z\,br} - \Delta I_{z1} = 254.400 - 23.700 = 230700 \text{ cm}^4$$

$$W_{z_1} = \frac{230.700}{50} = 4620 \text{ cm}^3$$

Momentul cababil al acestei secţiuni este :

$$M_{cap} = 4620 \times 1400 = 6470.000 \text{ kg/cm} = 64,7 \text{ Tm}$$

Momentul încovoietor într-o secţiune curentă este :

$$M_x = \frac{q}{2} x - \frac{qx^2}{2} = 44 x - \frac{11 x^2}{2}$$

Egalîndu-le obţinem intersecţia parabolei (M) cu dreapta paralelă cu axa absciselor (M_{cap}) - deci secţiunile pînă unde pot fi eliminate cele 2 platbande.

$$44 x - \frac{11 x^2}{2} = 64,7$$

$$11 x^2 - 88 x + 129,4 = 0$$

$$x^2 - 8 x + 11,8 = 0$$

$$z = 4 \pm \sqrt{4^2 - 11,8} = 4 \pm 2,05 = \begin{cases} 6,05 \text{ m} \\ 1,95 \text{ m} \end{cases}$$

5.16. Se dă grinda din figură avînd secţiunea compusă din 2 profile I nituite. (I_{32})

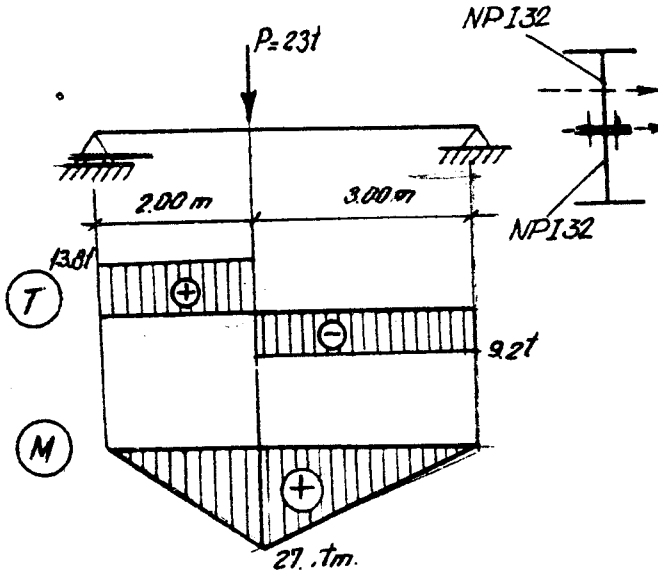


Fig. 203

Se cere :

1. σ_{max} şi τ_{max}.
2. Care este numărul de nituri Ø 23 necesar pe întreaga grindă calculînd după metoda aproximativă şi care ar fi numărul de nituri necesar efectuînd calçulul după metoda exactă.
3. Care ar fi sarcina P care se poate aplica pe grindă dacă cele 2 profile nu ar fi aşamblate prin nituire.
4. Distribuţia eforturilor unitare σ şi τ în sect.x=1,0 m

Se vor determina diagramele N. T. M.

1.- Eforturile σ şi τ maxime se determină cu formulele:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_{net}}$$

$$\tau_{max} = \frac{T_{max} S_{max}}{b I_{br} z_o}$$

$$I_{zo\ br} = 2\ (12510 + 77,8 \times 16^2) = 64.620 \text{ cm}^4$$

$$\Delta I = 2 \times \frac{2,3 \times 3,46^3}{12} = 16,3 \text{ cm}^4$$

$I_{zo\ net} = I_{zo\ br} - \Delta I \cong 64.000\ cm^4$

In acest caz $I_{z_o\ br}$ este foarte apropiat de $I_{zo\ net}$ întrucît niturile sînt în apropierea axei neutre. Este necesar să fie calculate următoarele elemente geometrice pentru stabilirea valorilor σ_{max} și τ_{max} :

$$W_{z_o\ net} = \frac{64.000}{32} = 2020\ cm^3$$

$$S_{br} = 77,8 \times 1[illegible] - 14,3 \times 1,75 \times 0,865 = 1230\ cm^3$$

$$\sigma_{max} = \frac{2760000}{2020} = 1365\ kg/cm^2$$

$$\tau_{max} = \frac{13800 \times 1230}{1,15 \times 64020} = 228\ kg/cm^2$$

2. Numărul de nituri Ø 23 se stabileşte prin condiţia ca ele să fie suficiente ca să preia forţa de lunecare de pe întreaga grindă.

$$L_e = \frac{T_{max}\, S}{I_{br}}\, l = n\, R_{min}$$

unde :

$T_{max} = 13,8\ t = 13.800\ kg$

$S = 1230\ cm^3$

S - momentul static al secţiunii care "lunecă" - de fapt care ar luneca-dacă n-ar fi niturile Ø 23 care să împiedice lunecarea celor două profile I 32 unul în raport cu celălalt.

$I = 64.620\ cm^4$

$l = 5,00\ m = 500\ cm$

$R_c = 1,6 \frac{\pi d^2}{4} \tau_a = 4,16 \times 1120 = 4670\ kg$

$R_p = d\, \delta_{min.}\, \sigma_{ap} = 2,3 \times 1,75 \times 2800 = 11000\ kg$

$R_{min} = R_c = 4670\ kg$

$$n = \frac{T_{max}\, S}{I_{br}\, R_{min}}\, l = \frac{13800 \times 1230}{64.620 \times 4670}\, 500 = 28,5\ nituri$$

Punînd cîte 2 nituri în secţiune, în total deci :

2 x 15 nituri = 30 nituri

Calculînd exact, ne-ar trebui nituri mai puţine ca număr deoarece forţa de lunecare este mai mică ca valoare şi anume :

$$L_e = \frac{S}{I}\left[(M_{max} - M_1) + (M_{max} - M_2)\right] = \frac{S}{I_{br}} 2\, M_{max}$$

întrucît M_1 şi M_2 sînt nule

Iar numărul de nituri va fi dat de relaţia

$$n = \frac{L_e}{R_{min}} = \frac{S\ 2\ M_{max}}{I_{br}\ R_{min}} = \frac{1230 \times 2 \times 2760000}{64.620 \times 4670} = 22,5 \text{ nituri}$$

Vom pune 2 x 12 nituri = 24 nituri

3.- Dacă cele două profile nu ar fi nituite, valoarea forţei P care s-ar putea aplica pe grindă ar fi :

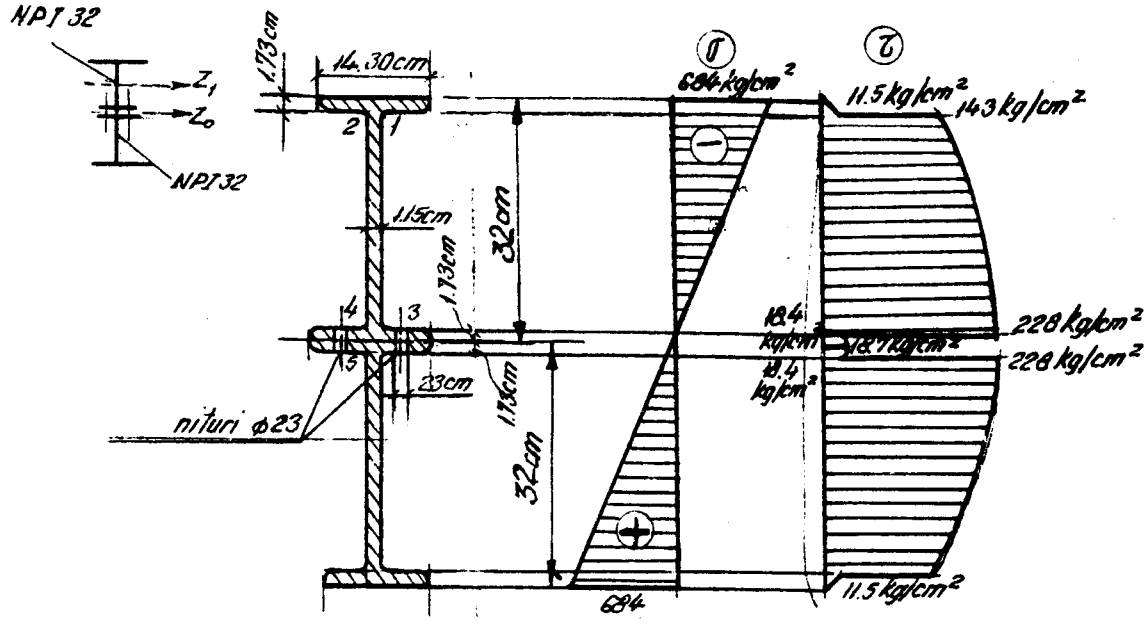


Fig. 204

$M'_{cap} = W'_{z\ ef}\ \sigma_a = 2 \times 782 \times 1400 = 2.180.000$ kg·cm = 21,8 tm

$M_{max} = \frac{3}{5} P \cdot 2 = (1,2\ P)$ tm

$1,2\ P = 21,8$

$P = \frac{21,8}{1,2} = 18,2$ t

4.- Pentru a cunoaşte distribuţia eforturilor unitare este suficient să aflăm σ_c - ele variind linear*

$$\sigma_o = \frac{M_s}{W_z} = \frac{1380000}{2020} = 684 \text{ kg/cm}^2$$

$M_s = 13,8$ tm

$T_s = 13,800$ kg

- Distribuţia eforturilor σ (parabolica) se va determina calculînd :

$$\tau_1 = \frac{13800 \times 770}{14,3 \times 64.620} \; 11,5 \text{ kg/cm}^2$$

$$S_1 = S_2 = 14,3 \times 1,73 \times 31,14 = 770 \text{ cm}^3$$

$$\tau_2 = \frac{13800 \times 770}{1,15 \times 64.620} = 143 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_3 = \frac{13800 \times 1230}{1,15 \times 64.620} = 228 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_4 = \frac{13800 \times 1230}{14,3 \times 64.620} = 18,4 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_5 = \frac{13800 \times 1250}{14,3 \times 64.620} = 18,7 \text{ kg/cm}^2$$

$$S_5 = 77,8 \times 16 = 1250 \text{ cm}^3$$

* Se poate deduce din distribuţie eforturile unitare normale că secţiunea dată nu este economică întrucît foarte mult material este concentrat în zona axei neutre.

5 17.- Se dă o grindă de lemn simplu rezemată avînd lungimea de 6,00 m, încărcată cu o sarcină uniform distribuită q = 0,5 T/mL

Să se dimensioneze ca o grindă compusă cu pene (buloanele vor fi de Ø 20).

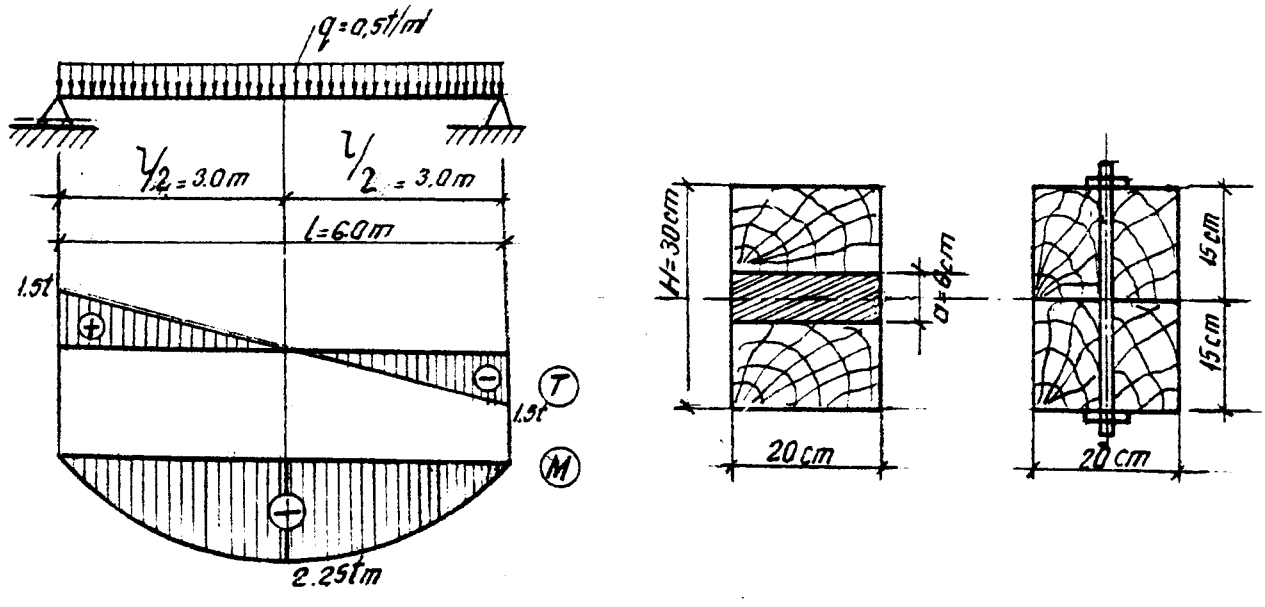


Fig. 205

Rezistenţele admisibile se vor lua următoarele pentru grinda din lemn de brad.

$\sigma_{aî}$ = 100 kg/cm^2 - la încovoiere

$\sigma_{asî}$ = 100 kg/cm^2 - la strivire paralel cu fibre

$\sigma_{a\perp}$ = 25 kg/cm^2 - la strivire normal pe fibre

σ_a = 10 kg/cm^2

Pentru penele din lemn de ştejar vom lua

$\sigma_{a\perp}$ = 50 kg/cm^2

σ_a = 15 kg/cm^2

Vom dimensiona grinda la încovoiere

$$W_{ax} = \frac{6,5 \cdot f_{adm}^2}{8} = 2,25 \text{ cm}$$

Pentru grinzi îmbinate cu gene se consideră

$W_{br} = 0,9\ W_{br}$

Rezultă:

$$W_{br} = \frac{M_{max}}{0,9\sigma_a} = \frac{\quad}{0,9 \cdot 10} = 240 \text{ cm}^3 = \frac{8h^2}{6}$$

Înlocuind $\frac{h}{b} = 1,5$ rezultă $h = \sqrt[3]{9 \cdot 240} = \sqrt[3]{22,500} = 28,2$ cm

$$b = \frac{28,2}{1,5} = 18,8 \text{ cm}$$

Alegem două grinzi suprapuse îmbinate cu gene de 6cm15.

Cuiele sunt aşezate în două secţiuni de bătaie între

lemn în alveole de înălţimea penelor.

Dimensiunile penelor se determină între anumite

limite astfel :

$$\frac{1}{5} \div \frac{1}{10}$$ ... alegem a = 5 cm

... alegem ... cm

Verificarea la strivire la

$$\frac{\quad}{12} = \frac{\quad}{12}$$

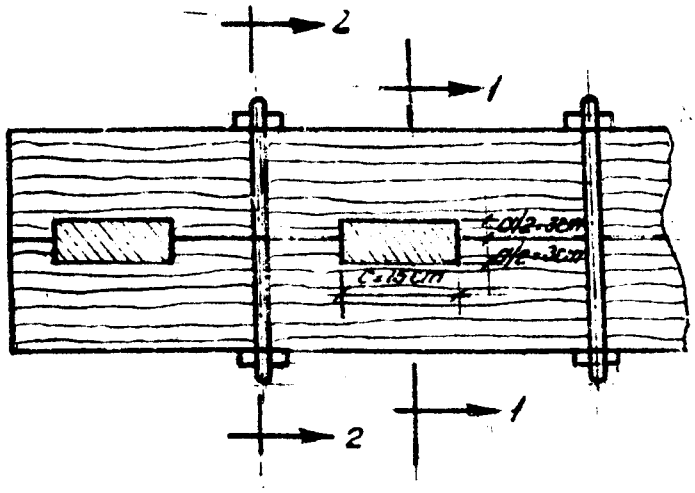


Fig. 2a

(slăbirea practic insensibilă căci pana e chiar în apropierea axei neutre).

$$W_z = \frac{44.640}{15} = 2980 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{ef} = \frac{225000}{2980} = 76 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_a$$

Verificarea în secţiunea 2-2

$$I_z = \frac{20 \times 30^3}{12} - \frac{2 \times 30^3}{12} = 40.500 \text{ cm}^4$$

$$W_z = \frac{40.500}{15} = 2700 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{ef} = \frac{225000}{2700} = 83,6 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_a$$

Numărul de pene se calculează astfel ca acestea lucrînd la forfecare sau strivire să poată prelua forţa de lunecare între cele două momente.

Lunecarea pe o jumătate de grindă este :

$$L_{l/2} = \frac{S}{I} \int_0^{l/2} T\,dx = \frac{S}{I} \Delta M_{2-1} = \frac{2250}{45.000} \cdot 225000 = 11250 \text{ kg}$$

$$S = 20 \times 15 \times 7,5 = 2250 \text{ cm}^3$$

$$I = \frac{20 \times 30^3}{12} = 45000 \text{ cm}^4$$

$$\int_0^{l/2} T\,dx = \frac{1,5 \times 3}{2} = 2,25 \text{ tm} = \Delta M = M_{max} - 0 = 2,25 \text{ tm}$$

Lunecarea pe o jumătate de grindă trebuie preluată de n pene

$$L\ b/2 < n\ R_{minim}$$

La forfecare :

$$R_{ef} = c \times b \times \tau_a = 15 \times 20 \times 15 = 4500 \text{ kg}$$

La strivire :

$$R_s = \frac{a}{b} \times b \times \tau_a = 3 \times 20 \times 50 = 3000 \text{ kg}$$

Deci pana rezistă mai prost la strivire putînd prelua doar 3000 kg faţă de 4500 kg pe care le poate prelua prin forfecare.

$$R_{min} = R_{st} = 3000 \text{ kg şi ne sînt necesare :}$$

$$n = \frac{L\ l/2}{R_m} = \frac{11250}{3000} = 3,75 \simeq 4 \text{ pene}$$

In total vom aşeza 8 pene pe întreaga grindă.

Pentru ca penele să lucreze bine, ele trebuie să preia aceeaşi forţa de lunecare - în consecinţă vor trebui aşezate astfel ca să le revie fiecăreia aceaşi suprafaţă de diagramă de forţă de tăietoare, căci termenul $\frac{S}{I}$ este constant.

Se foloseşte construcţia grafică din figură.

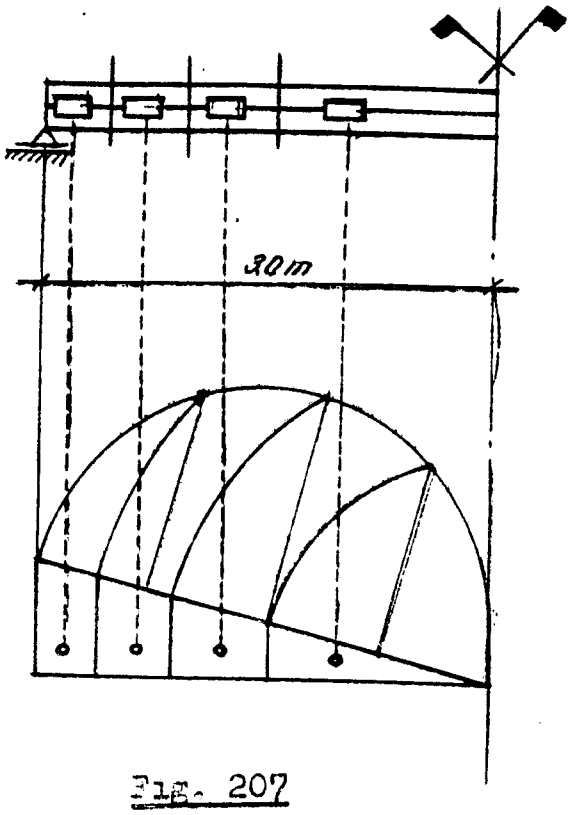


Fig. 207

Se vede că numărul penelor trebuie să fie par - la mijloc lunecarea e foarte mică - între pene se pun buloane.

După aşezarea penelor e nevoie să verificăm şi lemnul grinzii la forfecare între pene.

5.18. Se dă grinda din figură a cărei secţiune este formată dintr-un profil laminat I 20 şi o grindă dreptunghiulară de lemn 15 x 20.

Se cere să se determine care este sarcina maximă P care se poate aplica pe grindă astfel ca ambele materiale să reziste în bune condiţiuni.

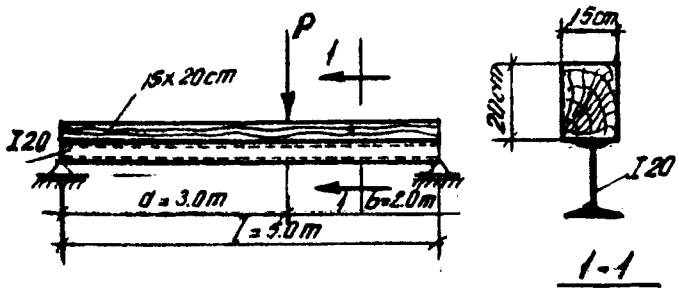


Fig. 208

Notînd cu M_1 şi M_2 momentele pe care le preiau secţiunile din lemn şi respectiv din oţel şi cu M_{max} momentul încovoietor maxim, putem scrie relaţia :

$$M_1+M_2=M_{max} = \frac{Pa\ b}{l}$$

A doua relaţie reiese ştiind că deformaţiile celor două elemente componente ale secţiunii sînt egale, deci :

$$\frac{M_1}{E_1 I_1} = \frac{M_2}{E_2 I_2}$$

Inlocuind şi rezolvînd cele două ecuaţii cu două necunoscute obţinem :

$$P'_{max} = \frac{M_1 l \left(+ \frac{E_2\ I_2}{E_1 I_1} \right)}{a\ \ b}$$

$$= \frac{M_1 l \left(1 + \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2}\right)}{a\ b}$$

Dar valorile maxime ale lui M_1 şi M_2 vor fi atunci cînd în fiecare din elemente va fi obţinut σ a respectiv adică

$$M_1 = \sigma a_1 . W_1$$

$$M_2 = \sigma a_2 . W_2$$

In concluzie obţinem două valori pentru P_{max}

$$\frac{a_1 . W_1 l \left(1 + \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1}\right)}{a\ b}$$

$$\left(1 + \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2}\right)$$

dintre aceste două valori vom reţine valoarea minimă. Astfel dacă :

$$\sigma a_1 = 100 \text{ kg/cm}^2$$

$$W_1 = \frac{15 \times 20^2}{6} = 1000 \text{ cm}^3$$

$$I_1 = \frac{15 \times 20^3}{12} = 10.000 \text{ cm}^4$$

$$E_1 = 100.000 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma a_2 = 1400 \text{ kg/cm}^2$$

$$W_2 = 214 \text{ cm}^3$$

$$I_2 = 2140 \text{ cm}^4$$

$$E_2 = 2.100.000 \text{ kg/cm}^2$$

Obţinem :

$$P'_{max} = \frac{100 \times 1000.500 \left(1 + \frac{2,1 \times 10^6 . 2140}{10^5 \times 10^4}\right)}{200 \times 300} = 4630 \text{ kg}$$

$$P''_{max} = \frac{1400 \times 214 \times 500 \left(1 + \frac{50^5 \times 10^4}{2,1 \times 10^6 \times 2140}\right)}{200 \times 300} = 3000 \text{ kg}$$

Deci sarcina maximă pe care o putem aşeza pe grindă este $P_{max} = 3000$ kg - la această valoare a forţei P în secţiunea cea

mai solicitată am atins în oţel σ_a adică :

$$\sigma_{ef} = 1400 \text{ kg/cm}^2$$

5.19. Să se dimensionaze pană de acoperiş din lemn, cu secţiune dreptunghiulară.

Să se găsească poziţia axei neutre.

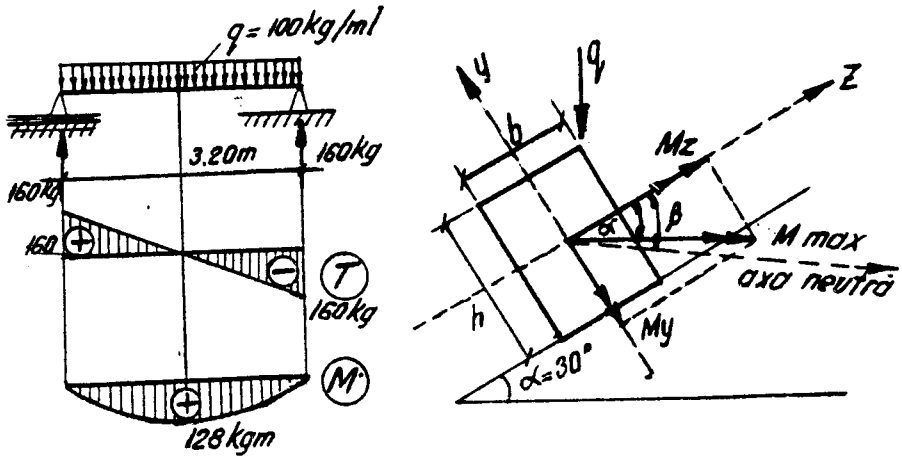


Fig. 209

$$M_{max} = \frac{100 \times 3,2^2}{8} = 128 \text{ kg}$$

$\sin \alpha = \sin 30^\circ = 0,5$

$\cos \alpha = \cos 30^\circ = 0,865$

$\text{tg } \alpha = \text{tg } 30^\circ = 0,575$

$M_{z\ max} = 128.\ 0,865 = 111 \text{ kg}$

$M_{y\ max} = 128.\ 0,5 = 64 \text{ kg}$

La lemn se consideră raportul $\frac{W_z}{W_y} = 1,5$

Formula de dimensionare la încovoiere oblică este :

$$W_{z\,nec} = \frac{M_{z\ max}}{\sigma_a}\left(1 + \frac{W_z}{M_y}\ \text{tg}\,\alpha\right) = \frac{11100}{100}(1+1,5x0,575) = 207 \text{ cm}^3$$

$$W_{z\ nec} = \frac{b\ h^2}{6} = \frac{h^3}{9} = 207 \text{ cm}^3$$

$$h = \sqrt{207 \times 9} = 12,3 \text{ cm}$$

$$b = \frac{12,3}{1,5} = 8,2 \text{ cm. Alegem o secţiune de 10 x 12 cm}$$

In consecinţă avem :

$$W_{z\ ef} = \frac{10 \times 12^2}{6} = 240 \text{ cm}^3 \qquad I_{z\ ef} = W_{zef} \times y_{max} = 240x6 = 1440 \text{ cm}^4$$

rp

$W_{y\,ef} = \frac{12 \times 10^2}{6} = 200\ cm^3$ $I_{yef} = W_{yef} \times z_{max} = 200 \times 5 = 1000\ cm^4$

Verificare :

$$\sigma_{max\,ef} = \frac{M_{z\,max}}{W_{z\,ef}} + \frac{M_{y\,max}}{W_{y\,ef}} < \sigma_{ad}$$

$$\sigma_{max\,ef} = \frac{11100}{240} + \frac{6400}{200} = 46,3 + 32 = 78,3\ kg/cm^2 < 100\ kg/cm^2$$

Poziţia axei neutre este dată de relaţia: $tg\,\beta = \frac{I_z}{I_y} tg\,\alpha$

$tg\,\beta = \frac{1440}{1000} \times 0,575 = 0,83$

$\beta = 39^0 40'$

Se poate observa că direcţia axei neutre nu coincide cu axa pe care se aplică momentul încovoietor $\beta \neq \alpha$ (numai la pătrat şi cerc ambele axe coincid).

5.20. Să se dimensioneze o pană metalică de acoperiş dintr-un profil I încărcată ca în figură. Unghiul de înclinare $\alpha = 22^0$ (fig. 210 şi 211).

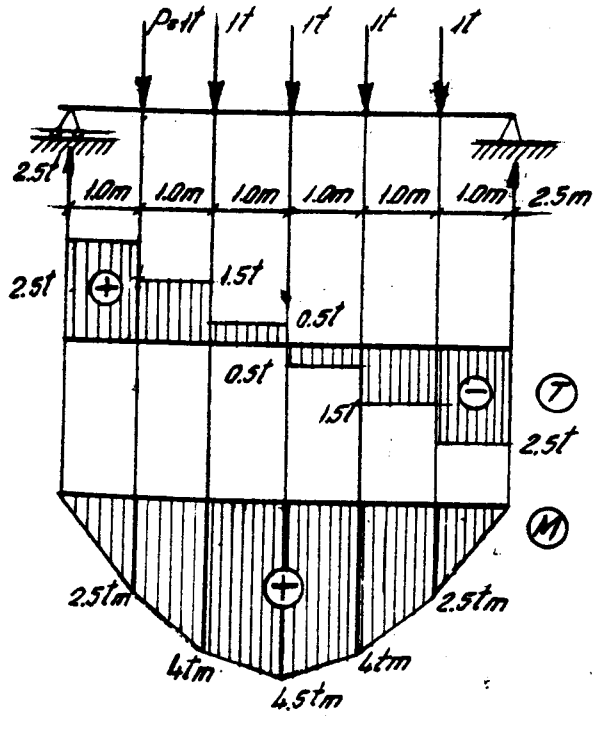


Fig. 210

Să se calculeze σ_{max} în cele 4 colţuri - A,B,C,D. din secţiunea cea mai solicitată

$M_{max} = 2,5x3 - 1,0x2,0 - 1,0x1,0 = 4,5$ Tm

Alegem $n = \frac{W_z}{W_s} = 7$

Elementele trigonometrice

$\sin \alpha = \sin 22^0 = 0,374$

$\cos \alpha = \cos 22^0 = 0,93$

$tg\,\alpha = tg\ 22^0 = 0,403$

$M_{z\,max} = M_{max} \cos \alpha = 4,5 \times 0,93 = 4,2$ Tm

$M_{y\,max} = M_{max} \sin \alpha = 4,5 \times 0,374 = 1,680$ Tm

Dimensionare :

$$W_{z\ nec} = \frac{M_{z\ max}}{\sigma_a}(1 + n\ tg\alpha) = \frac{420000}{1400}(1+7 \times 0{,}403) = 1150\ cm^3$$

Alegem un profil I e6 cu $W_z = 1090\ cm^3$ şi $W_y = 114\ cm^3$

Verificare:

$$\sigma_{ef\ max} = \frac{M_{z\ max}}{W_z} + \frac{M_{y\ max}}{W_y} = \frac{420000}{1090} + \frac{168000}{114} = 385+1540 = 1925\ kg/cm^2$$

Intrucît secţiunea nu rezistă alegem un profil mai mare:

I 40

$W_z = 1460\ cm^3$ $\qquad$ $M_y = 149\ cm^3$

Verificăm:

$$\sigma_{ef\ max} = \frac{420000}{1460} + \frac{168000}{149} = 288 + 1125 = 1413\ kg/cm^2 \simeq \sigma_a$$

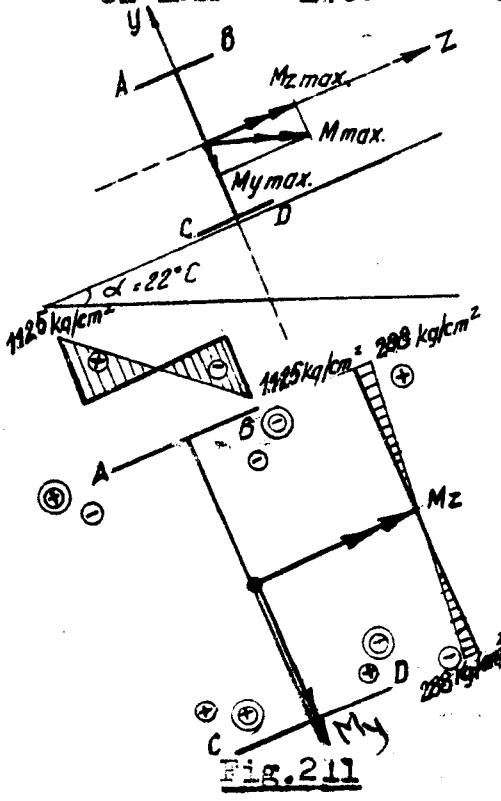


Fig.211

Incercuind într-un cerc semnul lui σ datorită lui M_z şi în două cercuri concentrice semnul lui σ datorită lui M_y, constatăm că valoarea maximă a efortului unitar normal va fi în B şi C căci semnele se adună şi valorile lui y şi z sînt maxime. Secţiunea considerată este aceea în care M are valoarea maximă - în mijlocul grinzii. Valorile σ în cele 4 puncte extreme sînt următoarele :

$$\sigma_A = -288 + 1125 = +\ 837\ kg/cm^2$$
$$\sigma_B = -288 - 1125 = -\ 1413\ kg/cm^2$$
$$\sigma_C = +288 + 1125 = +\ 1413\ kg/cm^2$$
$$\sigma_D = +288 - 1125 = -\ 837\ kg/cm^2$$

5.21. Se dă o pană de acoperiş metalică avînd încărcarea din figură (fig.212).

Se cere să se dimensioneze dintr-un profil U.

2.- Să se calculeze apoi poziţia axei neutre precum şi rezistenţele unitare normale maxime σ în secţiunea cea mai solicitată în cele patru colţuri.

$$\sin\alpha = \sin 25^0 = 0{,}422$$
$$\cos\alpha = \cos 25^0 = 0{,}908$$
$$tg\alpha = tg\ 25^0 = 0{,}465$$
$$M_{max} = 1200 \times 2{,}00 - 600 \times 1{,}00 = 1800\ kgcm$$

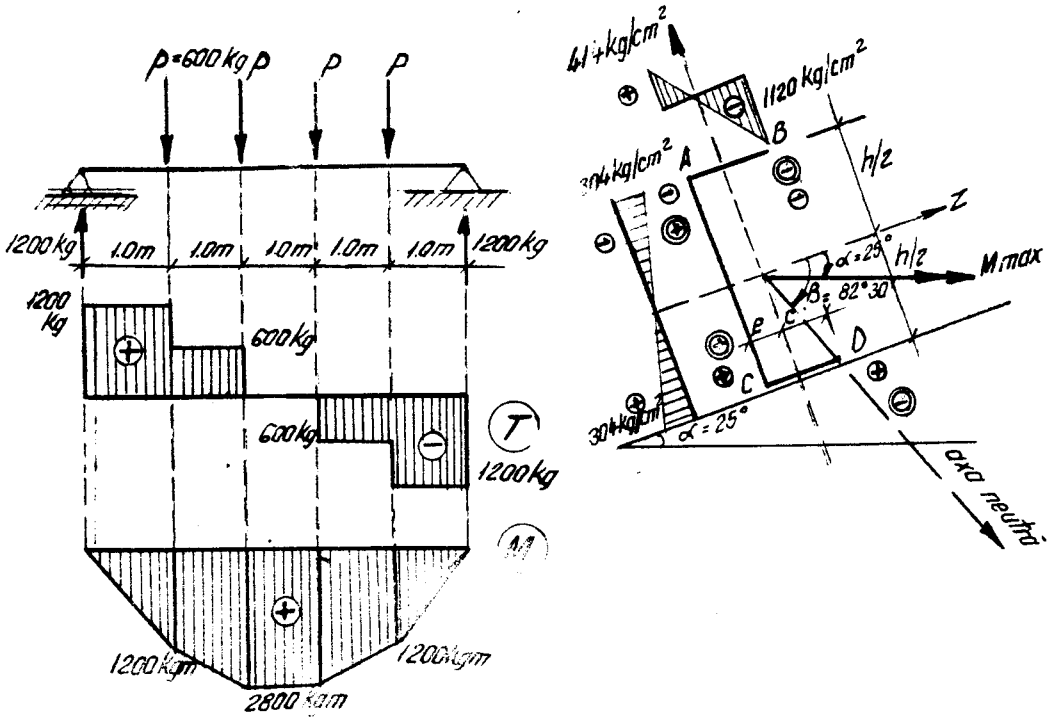


Fig. 212

M_y max = 1300 x 0,600 = 1630 kgm

M_y max = 1300 x 0,482 = 760 kgm

Ne alegem raportul $\frac{W_z}{W_y} = 7$

In figură, încercuim cu 1 cerc semnul lui σ datorită lui M_z şi cu 2 cercuri, cel dat de M_y

1. Formula de dimensionare este:

$$W_z \text{ nec} = \frac{M_{max}}{\sigma_a}\left(1 + \frac{W_z}{W_y} \cdot \operatorname{tg}\alpha\right) = \frac{163.000}{1.400}(1+7 \times 0,465) = 495 \text{ cm}^3$$

Alegem din tabel [30 avînd caracteristicile geometrice:

W_z ef = 535 cm³ $\quad I_z$ = 8030 cm⁴ $\quad e$ = 2,7 cm

W_y ef = 67,8 cm³ $\quad I_y$ = 495 cm⁴

Verificarea : $\sigma_{ef} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} < \sigma_a$

$$\sigma_{ef} = \frac{163.000}{535} + \frac{76.000}{67,8} = 304 + 1120 = 1424 \text{ kg/cm}^2 \cong \sigma_a$$

2.- Axa neutră trece prin centrul de greutate al secţiunii avînd o înclinare β faţă de axa z.

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{I_z}{I_y}\operatorname{tg}\alpha = \frac{8030}{495}\,0,465 = 7,52$$

$90^0 - \beta = 7^0 30'$

$\beta = 82^0 30'$

Eforturile unitare normale maxime în cele patru colţuri vor fi următoarele :

$$\sigma_A = -\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{I_y} e = -\frac{163.000}{535} + \frac{76.000}{495} \times 2,7 = +110 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_B = -\frac{M_z}{W_z} - \frac{M_y}{W_y} = -\frac{163.000}{535} - \frac{76.000}{67,8} = 1424 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_C = +\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{I_y} e = +\frac{163.000}{535} + \frac{76.000}{495} 2,7 = 718 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_D = +\frac{M_z}{W_z} - \frac{M_y}{W_y} = +\frac{163.000}{535} - \frac{76.000}{67,8} = -816 \text{ kg/cm}^2$$

Pentru punctele B şi D avînd distanţele în raport cu axele y şi z vom putea utiliza formulele :

$\frac{M_z}{W_z}$ şi $\frac{M_y}{W_y}$ iar pentru punctele A şi C întrucît y are valoare maximă în timp ce z are o valoare $e < z_{max}$, vom aplica formulele $\frac{M_z}{W_z}$ şi $\frac{M_y}{I_y}$ e

5.22.- Se dă grinda metalică din figură avînd o secţiune L 100 x 100 x 10 încărcată cu o sarcină concentrată P.

Se cere P_{max} care se poate aplica pe grindă în cazul celor 2 variante ale poziţiei cornierei.

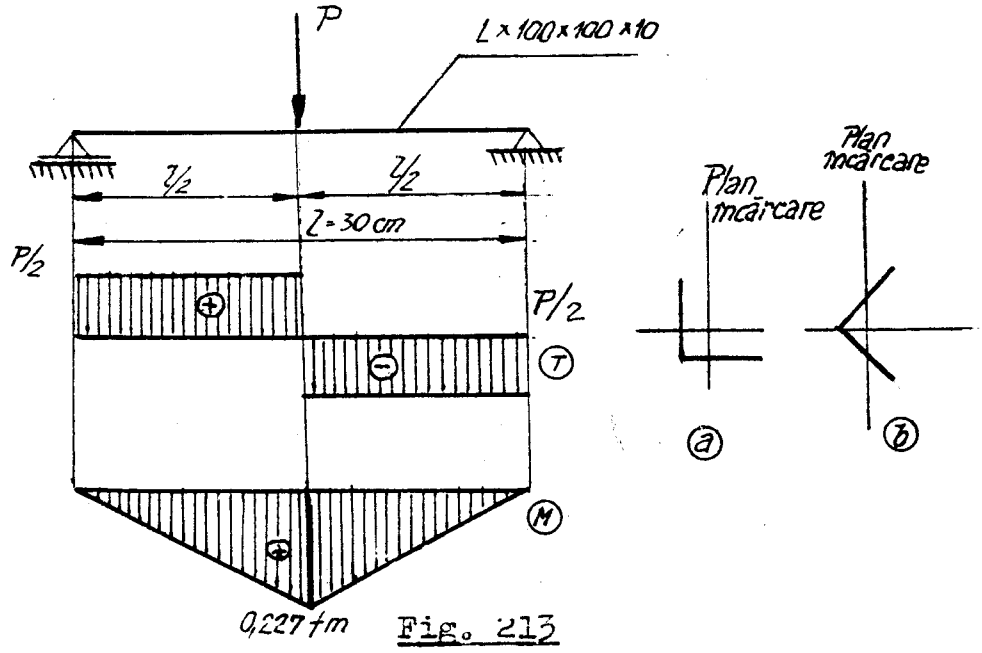


Fig. 213

Varianta a direcţia sarcinii nu corespunde cu nici una din direcţiile principale de inerţie.

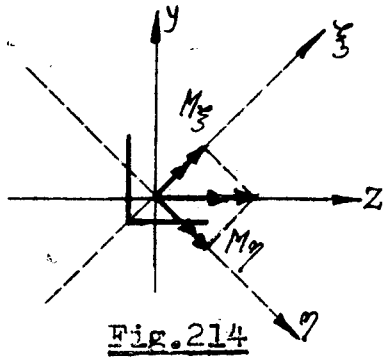


Fig.214

$$\sigma_{max} = \frac{M\xi}{W\xi} + \frac{M\eta}{W\eta} \leq \sigma_{ad}$$

Dar $M\xi = M\eta = M \cos 45^0 = 0,71\ M$

Dar $M = M_{cap}$

Deci $0,71\ M\left(\frac{1}{W\xi} + \frac{1}{W\eta}\right) = \sigma_a$

$$M = \frac{\sigma_a}{0,71}\left(\frac{W\xi \cdot W\eta}{W\xi + W\eta}\right) = \frac{1400}{0,71}\ \frac{(29,6 \times 18,4)}{48,0} = 22700\ kg \cdot cm = 0,227\ tm$$

Momentul încovoietor maxim este

$$M_{max} = \frac{P\,l}{4} = P \cdot \frac{3}{4} = (0,75\ P)\ tm$$

$$0,75\ P = 0,227$$

De unde

$$P_{1max} = \frac{0,227}{0,75} = 0,302\ t$$

In varianta b fenomenul este simplificat deoarece direcţia încărcării coincide cu o direcţie de inerţie principală va fi o solicitare de încovoiere simplă.

$$\text{In cazul b} : \sigma_{max} = \frac{M\xi}{W\xi} = \sigma_a$$

$M = M\xi = 1400 \times 29,6 = 41.400\ kg \cdot cm = 0,414\ tm$ de unde se poate stabili că $P_{2max} = \frac{0,414}{0,75} = 0,552\ t$

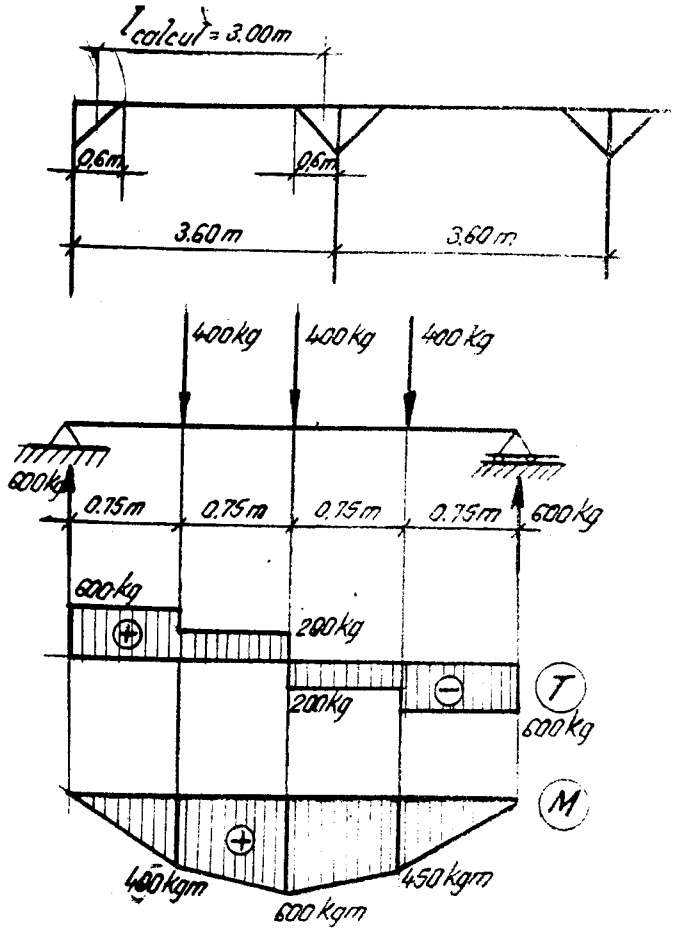
Se vede că poziţia secţiunii are o mare influenţă asupra rezistenţei grinzii - preferabil este ca la fenomenul de încovoiere, sarcina să se aplice pe direcţia (η). Momentului de inerţie minim (η) respectiv vectorul - moment încovoietor, să fie după direcţia axei momentului de inerţie maxim.

5.23. Se dă o pană din lemn a unei şarpante avînd o secţiune 15 x 20 cm şi o deschidere teoretică de calcul $l_c = 3,00$ m încărcată ca în figura 215.

1. Se cere σ şi τ în punctul S ($x = 1,0$ m, $y = -5$ cm şi $z = +3$ cm).

2. Se cere calcularea lui σ max şi τ max şi poziţia axei neutre din secţiunea $x = 1,00$ m.

Efortul unitar normal σ se calculează cu formula generală.



$$\sigma = \pm \frac{N}{F} \pm \frac{M_y}{I_y} z$$

...le eforturilor norma... ...ntare pe care le vom ... sînt notate cu 1 cerc ... acelea provenite ... N_z şi cu 2 cercuri din ...

...metul S va avea sem... ...nele :

$$\sigma_s = + \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z$$

...elelate date se deter... ...în cele ce urmează:

...00x1-400x0,25 = 500 kgm

cos α = 0,865

sin α = 0,5

tg α = 0,578

$$M_z = M \cos\alpha = 500 \times 0,865 = 432 \text{ kgm} \qquad I_z = \frac{15 \times 20^3}{12} = 10000 \text{ cm}^4$$

$$M_y = M \sin\alpha = 500 \times 0,5 = 250 \text{ kgm} \qquad I_y = \frac{20 \times 15^3}{12} = 5620 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_s = \frac{\cdot\cdot\cdot}{\cdot\cdot\cdot} - \frac{\cdot\cdot\cdot}{\cdot\cdot\cdot} \cdot 3 = + 1,5 \text{ kg/cm}^2$$

...ntru calculul ... ...ului maxim total vom trebui să ...m τ_z ... ...ţa tăietoare T_z şi τ_y dat de T_y.

$$\tau_y = \frac{T_y S_y}{b I_y} \quad \text{şi} \quad \tau_z = \frac{T_z S_z}{b I_z}$$

Unde S_z şi S_y sînt ... ...ului static şi de inerţie în raport cu axa y iar S_y şi ... în raport cu axa y. T_y şi T_z sînt componentele forţei tăietoare ... ...

T = 600 ... 400 ... 200 kg;

$T_y = T \sin\alpha = 200 \times 0,5 = 100$ kg.

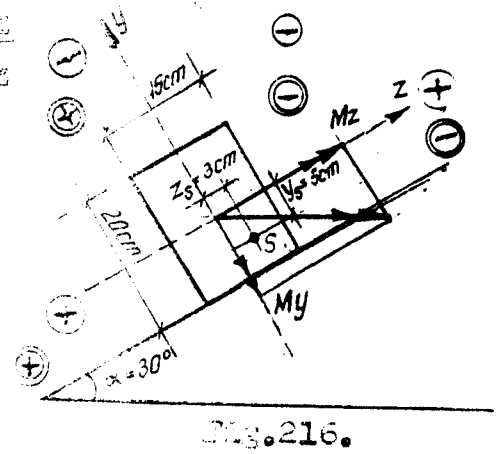


Fig.216.

$T_z = T \cos \alpha = 200 \times 0,865 = 173$ kg

$S_z = 5 \times 15 \times 7,5 = 563$ cm^3

$S_y = 4,5 \times 20 \times 5,25 = 473$ cm^3

b = 15 cm

h = 20 cm

$$\tau_y = \frac{100 \times 473}{20 \times 5620} = 0,43 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_z = \frac{173 \times 563}{15 \times 10000} = 0,65 \text{ kg/cm}^2$$

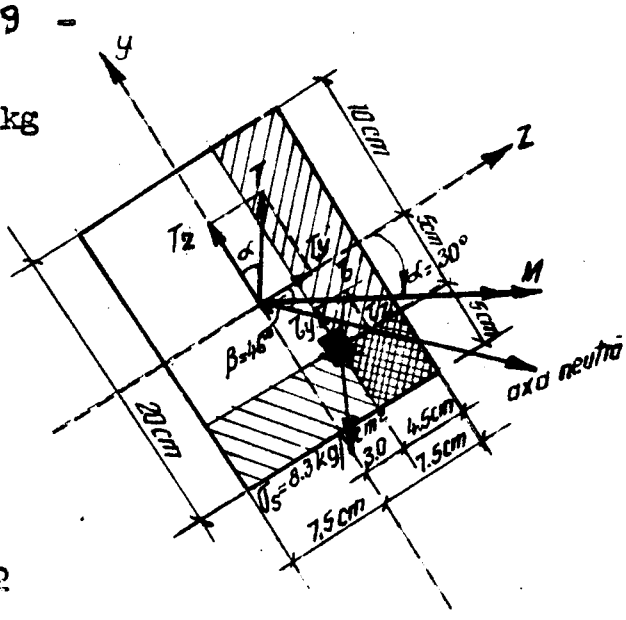


Fig.217

$$\tau_{total} = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2} = 0,43^2 + 0,65^2 = 0,78 \text{ kg/cm}^2$$

2. Pentru τ max alegem colţul secţiunii unde semnele concordă.

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{43300}{1000} + \frac{25000}{750} = 86,6 \text{ kg/cm}^2$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{10000}{10} = 1000 \text{ cm}^3$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{5620}{7,5} = 750 \text{ cm}^3$$

Pentru τ maxim se schimbă doar momentele statice (este maxim în origina axelor).

$$\tau_{y\,max} = \frac{100 \times 562}{20 \times 5620} = 0,51 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{z\,max} = \frac{173 \times 750}{20 \times 10000} = 0,85 \text{ kg/cm}^2$$

$S_z = 10 \times 15 \times 5 = 750$ cm^3

$S_y = 7,5 \times 20 \times 3,75 = 562$ cm^3

$$\tau_{total} = \sqrt{0,51^2 + 0,87^2} = 1,01 \text{ kg/cm}^2$$

Poziţia axei neutre se determină cu formula

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{I_z}{I_y} = 0,578 \cdot \frac{10000}{5620} = 1,03$$

$$\beta = 46^\circ$$

rp
Cda.77/5.III.1966

Simbolul L	Dimensiunile secțiunii a	b	g	r	r_1	Secțiunea S	Masa G	Distanțele axelor e_x	e_y	W_1	W_2	r_1	r_2	r_3	Unghi de înclinare a axelor	Mărimile statice pentru axele de încovoiere X-X I_x	W_x	i_x	Y-Y I_y	W_y	i_y	ξ-ξ $I_{\xi max}$	W_ξ	$i_{\xi max}$	η-η $I_{\eta min}$	W_η	$i_{\eta min}$	X_1-X_1 I_{x_1}	Y_1-Y_1 I_{y_1}
	mm					cm^2	kg/m	cm							tgα	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^4
63×40×	4	63	40	4	7	2,5	4,04	3,17	2,03	0,91	4,30	3,03	1,60	2,19	0,99	0,397	16,3	3,85	2,01	5,16	1,67	1,13	18,4	4,28	2,13	3,07	1,40	0,87	33,0	8,51
	5			5			4,98	3,91	2,08	0,95	4,27	3,06	1,65	2,18	1,04	0,396	19,9	4,72	2,00	6,26	2,05	1,12	22,5	5,25	2,12	3,73	1,71	0,86	41,4	10,8
	6			6			5,90	4,63	2,12	0,99	4,25	3,09	1,70	2,16	1,06	0,395	23,3	5,58	1,99	7,28	2,42	1,11	26,3	6,17	2,11	4,36	2,00	0,86	49,9	13,1
	8			8			7,68	6,03	2,20	1,07	4,21	3,10	1,79	2,17	1,12	0,385	29,6	7,22	1,96	9,15	3,12	1,09	33,4	7,88	2,09	5,58	2,58	0,85	66,9	17,9
70×45×	4,5	70	45	4,5	7,5	2,5	5,07	3,98	2,25	1,03	4,79	3,39	1,80	2,46	1,15	0,407	25,3	5,32	2,23	8,25	2,38	1,28	28,7	5,99	2,38	4,88	1,98	0,98	51,0	13,6
	5			5			5,59	4,39	2,28	1,05	4,77	3,41	1,83	2,44	1,17	0,406	27,8	5,88	2,23	9,04	2,62	1,27	31,5	6,59	2,37	5,34	2,18	0,98	56,7	15,2
	6			6			6,63	5,10	2,32	1,09	4,75	3,43	1,88	2,43	1,20	0,404	32,6	6,96	2,22	10,6	3,10	1,26	36,9	7,77	2,36	6,26	2,57	0,97	65,9	18,6
80×50×	5	80	50	5	8	3	6,36	4,99	2,60	1,13	5,45	3,82	1,99	2,77	1,24	0,387	41,6	7,70	2,56	12,6	3,27	1,41	40,7	8,58	2,71	7,60	2,74	1,09	84,6	20,8
	6			6			7,55	5,92	2,65	1,17	5,41	3,85	2,05	2,75	1,27	0,386	49,0	9,15	2,55	14,8	3,88	1,40	55,0	10,1	2,76	8,88	3,22	1,08	102	25,2
	8			8			9,87	7,78	2,73	1,25	5,37	3,89	2,14	2,74	1,34	0,381	62,8	11,9	2,53	18,8	5,03	1,39	70,3	13,1	2,70	11,4	4,16	1,06	138	34,8
90×56×	5,5	90	56	5,5	9	3	7,86	6,17	2,92	1,26	6,13	4,28	2,22	3,12	1,39	0,384	65,3	10,7	2,88	19,7	4,53	1,58	73,2	11,9	3,09	11,8	3,78	1,22	132	32,2
	6			6			8,54	6,70	2,95	1,28	6,11	4,30	2,25	3,10	1,41	0,384	70,6	11,7	2,88	21,2	4,91	1,58	79,1	12,9	3,07	12,7	4,09	1,22	145	35,2
	8			8			11,2	8,77	3,04	1,36	6,06	4,35	2,35	3,09	1,48	0,380	90,9	15,2	2,85	27,1	6,39	1,56	102	16,8	3,03	16,3	5,29	1,21	194	47,8
100×63×	6	100	63	6	10	3,5	9,59	7,53	3,23	1,42	6,81	4,79	2,50	3,47	1,58	0,393	98,3	14,5	3,20	30,6	6,27	1,79	111	16,2	3,39	18,2	5,23	1,38	198	49,9
	7			7			11,1	8,70	3,28	1,46	6,78	4,82	2,56	3,46	1,61	0,392	113	16,8	3,19	35,0	7,23	1,78	127	18,7	3,38	20,8	6,01	1,37	232	58,7
	8			8			12,6	9,87	3,32	1,50	6,76	4,84	2,60	3,46	1,64	0,391	127	19,0	3,18	39,2	8,17	1,77	141	21,1	3,35	23,4	6,77	1,36	266	67,6
	10			10			15,5	12,1	3,40	1,58	6,72	4,87	2,70	3,43	1,70	0,387	154	23,3	3,15	47,1	9,99	1,75	173	25,7	3,34	28,3	8,24	1,35	333	85,8
110×70×	6	110	70	6	10	3,5	10,6	8,11	3,52	1,56	7,52	5,30	2,76	3,84	1,76	0,402	132	17,7	3,53	42,5	7,81	2,00	149	19,9	3,74	25,1	6,51	1,54	264	68,7
	7			7			12,3	9,64	3,57	1,60	7,49	5,32	2,81	3,84	1,79	0,401	152	20,5	3,52	48,7	9,02	1,99	172	23,0	3,73	28,8	7,50	1,53	309	80,3
	8			8			13,9	10,9	3,61	1,64	7,46	5,34	2,86	3,82	1,83	0,400	172	23,2	3,51	54,6	10,2	1,98	193	26,0	3,72	32,3	8,44	1,52		92,3
125×80×	7	125	80	7	11	4	14,1	11,0	4,01	1,80	8,55	6,04	3,17	4,37	2,03	0,407	227	26,7	4,01	73,7	11,9	2,29	257	30,1	4,26	43,4	9,89	1,76	452	119
	8			8			16,0	12,5	4,05	1,84	8,52	6,07	3,23	4,36	2,05	0,406	256	30,3	4,00	82,9	13,5	2,28	290	34,0	4,24	48,8	11,2	1,75	518	137
	10			10			19,7	15,5	4,14	1,92	8,47	6,11	3,33	4,36	2,12	0,404	312	37,3	3,98	100	16,5	2,26	353	41,6	4,22	59,5	13,6	1,74	649	173
	12			12			23,4	18,3	4,22	2,00	8,43	6,14	3,43	4,34	2,17	0,401	365	44,1	3,95	117	19,5	2,24	413	48,9	4,21	69,5	16,0	1,72	781	210
140×90×	8	140	90	8	12	4	18,0	14,1	4,49	2,04	9,63	6,80	3,58	4,91	2,31	0,411	364	38,3	4,49	120	17,2	2,58	414	43,2	4,79	70,3	14,3	1,98	727	194
	10			10			22,2	17,5	4,58	2,12	9,52	6,84	3,69	4,88	2,37	0,409	444	47,2	4,47	145	21,1	2,56	504	53,0	4,77	85,5	17,5	1,96	911	245
160×100×	9	160	100	9	13	4,5	22,9	18,0	5,19	2,24	10,9	7,66	3,97	5,52	2,51	0,391	606	56,0	5,15	186	24,0	2,85	681	62,6	5,42	111	19,9	2,20	1221	300
	10			10			25,3	19,8	5,23	2,28	10,9	7,68	4,03	5,52	2,54	0,390	667	61,9	5,13	204	26,4	2,84	750	69,0	5,42	121	21,9	2,19	1359	335
	12			12			30,0	23,6	5,32	2,36	10,8	7,72	4,13	5,50	2,60	0,388	784	73,4	5,11	239	31,2	2,82	881	81,5	5,41	142	25,8	2,18	1634	405
	14			14			34,7	27,3	5,40	2,43	10,8	7,75	4,20	5,47	2,66	0,385	897	84,6	5,08	272	35,9	2,80	1006	95,5	5,39	162	29,6	2,16	1910	477

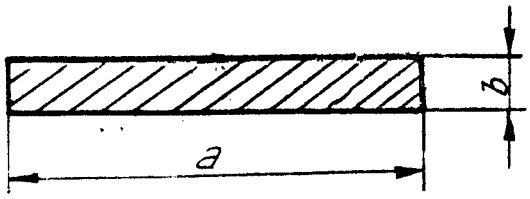
Simbolul L	Dimensiunile secțiunii					Secțiunea	Masa	Distanțele axelor							Unghi de înclinare a axelor	Mărimile statice pentru axele de încovoiere														
																X-X			Y-Y			3-3			η-η			X_1-X_1	Y_1-Y_1
	a	b	g	r	r_1	S	G	e_x	e_y	W_1	W_2	r_1	r_1	r_3		I_x	W_x	i_x	I_y	W_y	i_y	I_{max}	W_3	i_{max}	I_{min}	W_η	i_{min}	I_{x_1}	I_{y_1}
	mm					cm^2	Kg/m	cm							tgα	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^4
180×110×10	180	110	10	14	5	28,3	22,2	5,88	2,44	12,2	8,51	4,35	6,15	2,70	0,376	952	78,6	5,80	276	32,3	3,12	1006	87,2	6,12	165	26,8	2,42	1933	444
180×110×12			12			33,7	26,4	5,97	2,52	12,1	8,55	4,45	6,13	2,77	0,374	1122	93,3	5,77	324	39,2	3,10	1252	103	6,08	194	31,6	2,40	2324	537
200×125×11	200	125	11	14	5	34,9	27,4	6,50	2,79	13,6	9,60	4,97	6,92	3,17	0,392	1449	107	6,45	446	46,0	3,58	1633	120	6,83	264	38,1	2,75	2920	718
200×125×12			12			37,9	29,7	6,54	2,83	13,6	9,60	5,01	6,91	3,17	0,391	1568	117	6,43	482	49,8	3,57	1764	130	6,82	285	41,2	2,74	3189	786
200×125×14			14			43,9	34,4	6,63	2,91	13,5	9,64	5,11	6,91	3,24	0,390	1801	135	6,41	551	57,4	3,54	2026	150	6,81	327	47,3	2,73	3726	922
200×125×16			16			49,8	39,1	6,71	3,00	13,5	9,65	5,21	6,88	3,31	0,388	2026	152	6,38	617	64,8	3,52	2277	169	6,76	367	53,3	2,72	4264	1061
250×160×12	250	160	12	18	6	48,3	37,9	7,97	3,53	17,1	12,1	6,29	8,76	4,07	0,410	3147	185	8,07	1032	82,8	4,62	3576	209	8,62	604	68,9	3,54	6212	1634
250×160×14			14			56,0	44,0	8,06	3,61	17,0	12,1	6,39	8,75	4,12	0,409	3625	214	8,04	1185	95,7	4,60	4116	241	8,58	693	79,2	3,52	7248	1910
250×160×16			16			63,6	49,9	8,14	3,69	17,0	12,2	6,49	8,74	4,17	0,408	4091	243	8,02	1333	108	4,58	4641	273	8,53	781	89,3	3,50	8308	2200
250×160×18			18			71,1	55,8	8,23	3,77	16,9	12,2	6,59	8,71	4,26	0,407	4545	271	7,99	1475	121	4,56	5157	304	8,52	866	99,3	3,49	9358	2487
250×160×20			20			78,5	61,7	8,31	3,85	16,9	12,3	6,69	8,70	4,29	0,405	4987	299	7,97	1613	131	4,53	5653	334	8,49	949	109	3,48	10410	2776

OBSERVAȚII

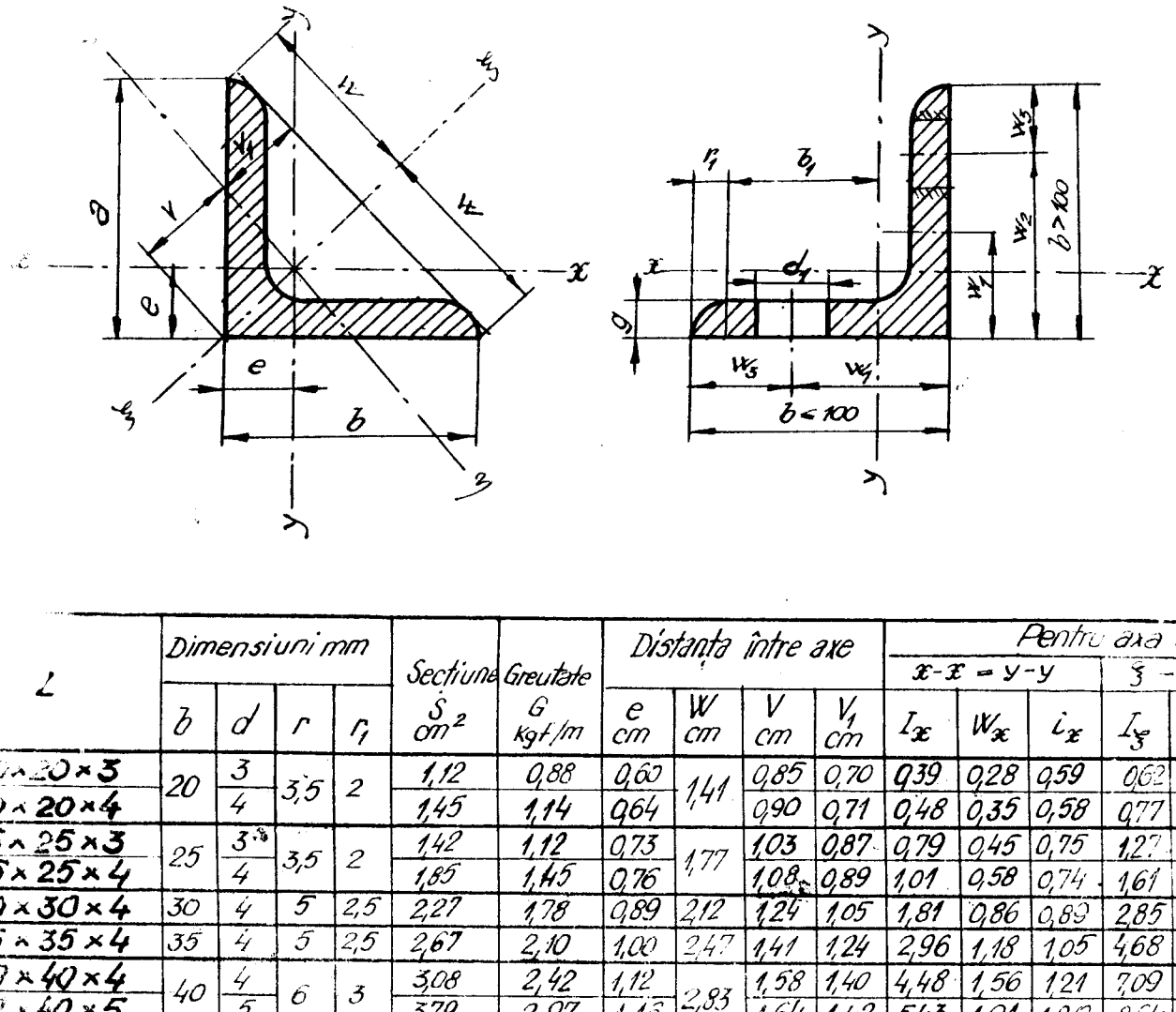
- Masa este calculată pentru dimensiunile nominale pe baza densității de 7,85 Kg/dm³.
- Pentru obținerea profilelor cu dimensiuni peste 140 × 90 atît în cazul proiectării cît și în cazul utilizării acestora, se va cere în prealabil avizul Ministerului Metalurgiei și Construcțiilor de mașini.

OTEL LAT

STAS 395-59



Lățime a mm	Abateri limită mm	Grosimi b, mm													
		5	6	7	8	10	12	14	16	18	20	25	30	40	50
		Abateri limită la grosimi, mm													
		+0,4 −0,5							+0,5 −0,6		+0,6 −0,7	+0,8 −1,0	+1,0 −1,2	+1,3 −1,6	+1,6 −2,0
		Greutate kgf/m													
12	+0,8 −1,0	0,471	0,565												
14		0,550	0,659		0,879										
16		0,628	0,754		1,01	1,25									
18		0,707	0,848		1,13										
20		0,785	0,942		1,26	1,57	1,88								
22					1,38	1,73	2,07								
25		0,981	1,18		1,57	1,96	2,36		3,14						
30	+0,9 −1,1	1,18	1,41	1,65	1,83	2,36	2,83	3,30			4,70				
35		1,37	1,65	1,92	2,20	2,75	3,30	3,85	4,40						
40		1,57	1,88		2,51	3,14	3,77	4,40	5,02		6,28	7,85			
45		1,77	2,12		2,83	3,53	4,24	4,95	5,65		7,07		10,6		
50		1,96	2,36		3,14	3,93	4,71	5,50	6,23	7,05	7,85	9,81	11,8		
55		2,15	2,59			4,32	5,18	6,05	6,91	7,75			13,0		
60	+1,2 −1,2	2,36	2,83		3,77	4,71	[illegible]		[illegible]	8,45	9,42	11,8	14,1	18,8	
70	+1,1 −1,4	2,75	3,30		4,40	5,50	6,59	7,69	8,79	9,86	11,0	13,7	16,5		
80	+1,3 −1,6	3,14			5,02	6,28	7,54	8,79	[illegible]	[illegible]	[illegible]	15,7	18,8	25,1	
90	+1,4 −1,8	3,53			5,65	7,07	8,43		11,3	12,6	14,1	17,7	21,2	28,3	
100	+1,6 −2,0				6,28	7,85	9,42		12,6	14,1	15,7	19,6	23,6	31,4	39,
110	+1,8 −2,2				6,91	8,64	10,4		13,8	15,5	17,3	21,6	25,9	34,5	43,
120	+1,9 −2,4				7,54	9,42	11,3		15,1	17,0	18,8	23,6	28,3	37,7	47,
130	+2,1 −2,6		6,12		8,16	10,2	12,3		16,3						
140	+2,2 −2,8		6,59		8,79	11,0	13,2		17,6		22,0	27,5	33,0	44,0	55,
150	+2,4 −[illegible]		[illegible]	3,25	3,42	11,8	14,1	16,5	18,8						



OTEL CORNIER CU ARIPI EGALE

STAS 424-49

I = moment de inerție W = modul de rezistență

$i = \sqrt{\frac{I}{S}}$ = raza de giratie.

Pentru $b \leq 100$mm, niturile se dispun pe un rînd.

Pentru $b > 100$mm, niturile se dispun pe două rînduri

$S_{k\,max}$ = lungimea maximă de flambaj pentru $\lambda = 250$

I_{xy} = moment centrifugal

b_i = dimensiuni rotunjite pentru furura interioară

U = suprafața de vopsire pe unitatea de lungime (m)

V = supra-fata de vopsire pe unitatea de greutate. (t

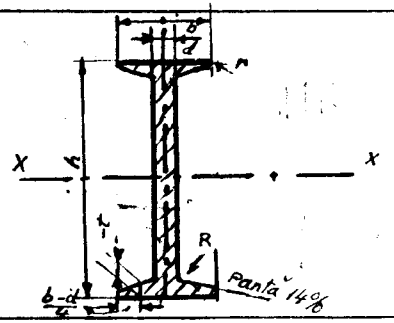
L	Dimensiuni mm				Sectiune	Greutate	Distanța între axe				Pentru axa de încovoiere								Distanță de găurire mm				S_k max m	I_{xy}	b_i	Suprafa de vop	
											x-x = y-y			ξ-ξ		η-η												
	b	d	r	r_1	S cm²	G kgf/m	e cm	W cm	V cm	V_1 cm	I_x	W_x	i_x	I_ξ	i_ξ	I_η	W_η	i_η	W_1	W_2	d_1	W_3		cm^4	mm	m^2/m	
20×20×3	20	3	3,5	2	1,12	0,88	0,60	1,41	0,85	0,70	0,39	0,28	0,59	0,62	0,74	0,15	0,18	0,37	—	—	—	—	0,93	0,24	11	0,077	8
20×20×4		4			1,45	1,14	0,64		0,90	0,71	0,48	0,35	0,58	0,77	0,73	0,19	0,21	0,36					0,90	0,29	10		6
25×25×3	25	3	3,5	2	1,42	1,12	0,73	1,77	1,03	0,87	0,79	0,45	0,75	1,27	0,95	0,31	0,30	0,47	—	—	—	—	1,18	0,48	16	0,097	8
25×25×4		4			1,85	1,45	0,76		1,08	0,89	1,01	0,58	0,74	1,61	0,93	0,40	0,37	0,47					1,18	0,61	15		6
30×30×4	30	4	5	2,5	2,27	1,78	0,89	2,12	1,24	1,05	1,81	0,86	0,89	2,85	1,12	0,73	0,61	0,58	17	13	8,4	—	1,45	1,05	18	0,116	6
35×35×4	35	4	5	2,5	2,67	2,10	1,00	2,47	1,41	1,24	2,96	1,18	1,05	4,68	1,33	1,24	0,88	0,68	20	15	11	—	1,70	1,72	23	0,136	6
40×40×4	40	4	6	3	3,08	2,42	1,12	2,83	1,58	1,40	4,48	1,56	1,21	7,09	1,52	1,80	1,18	0,78	22	18	11	—	1,95	2,62	27	0,155	6
40×40×5		5			3,79	2,97	1,16		1,64	1,42	5,43	1,91	1,20	8,64	1,51	2,22	1,35	0,77	22	18	11	—	1,93	3,20	26	0,155	5
45×45×5	45	5	7	3,5	4,30	3,38	1,28	3,18	1,81	1,58	7,83	2,43	1,35	12,4	1,70	3,25	1,80	0,87	25	20	11	—	2,18	4,58	29	0,174	5
50×50×5	50	5	7	3,5	4,80	3,77	1,40	3,54	1,98	1,76	11,0	3,05	1,51	17,4	1,90	4,59	2,32	0,98	30	20	13	—	2,45	6,41	34	0,194	5
50×50×6		6			5,69	4,47	1,45		2,04	1,77	12,8	3,61	1,50	20,4	1,89	5,24	2,57	0,96					2,40	7,56	33		4
50×50×7		7			6,56	5,15	1,49		2,11	1,78	14,6	4,15	1,49	23,1	1,85	6,02	2,85	0,95					2,40	8,58	32		3
60×60×6	60	6	8	4	6,91	5,42	1,65	4,24	2,39	2,11	22,8	5,29	1,82	36,2	2,29	9,45	3,95	1,17	35	25	17	—	2,93	13,4	42	0,233	4
60×60×8		8			9,03	7,09	1,77		2,50	2,14	29,1	6,88	1,80	46,1	2,26	12,1	5,07	1,16	35	25	17	17	3,21	17,0	40	0,233	
60×60×10		10			11,1	8,69	1,85		2,62	2,17	34,9	8,41	1,78	56,1	2,25	14,8	6,37	1,15	35	25	17	17	3,48	20,3	38	0,233	

OTEL CORNIER CU ARIPI EGALE

STAS 424 -49

L	Dimensiuni mm				Secțiune	Greutate teoretică	Distanța între axe				Pentru axa de încovoiere								Distanța de găurire mm				$S_{b\,max}$ m	I_{xy} cm⁴	b_i mm	Suprafață de vopsit	
											x-x = y-y				3-3		y-y											
	b	d	r	r_1	S cm²	G kgf/m	c cm	W cm³	V cm	V_1 cm	I_x	W_x	i_x			I_y	W_y	i_y	w_1	w_2	d_1	w_3				U m²/m	V m³/m
70×70×7	70	7	9	4	9,40	7,38	1,97	4,85	2,79	2,1	7,24	8,45	5,46			17,0	6,31	1,35	40	30		17	3,43	24,8	49	0,272	7,3
70×70×9		9			11,9	9,34	2,05		2,90	2,20	8,80	10,6	4,42			20,6	7,88	1,30	40	30		17	3,40	30,6	47	0,272	9,3
80×80×8	80	8	10	5	12,3	9,66	2,16	6,66	3,40	2,5	12,2	12,6	4,97			31,0	9,65	1,59	45	—	21	35	3,88	42,7	57	0,311	9,6
80×80×10		10			15,1	11,9	2,34		3,60	2,65	37,5	15,5	4,91			38,9	10,9	1,59	45	—	21	35	3,85	51,0	55	0,311	11,9
90×90×9	90	9	11	5	15,5	12,2	2,47	8,99	3,98	3,15	17,0	18,9	6,14	146	5,45	47,8	13,5	1,76	50	—	27	40	4,40	64,2	64	0,351	12,2
90×90×11		11			18,9	14,8	2,72		4,30	3,40	19,6	21,0	6,72	218	3,41	57,1	15,7	1,74	50	—	27	40	4,38	80,9	62	0,351	14,7
100×100×10	100	10	12	5	19,2	15,1	2,82	12,07	3,94	2,84	17,7	24,7	7,84	290	3,91	73,3	19,4	1,95	55	—	31	45	4,83	104,1	72	0,390	15,1
100×100×12		12			22,8	17,9	2,97		4,50	3,20	20,1	29,2	9,26	428	3,80	90,2	23,0	1,95	55	—	31	45	4,58	121	70	0,390	17,9
100×100×14		14			26,4	20,7	3,11		4,70	3,40	22,3	33,2	10,6	572	3,77	96,3	23,4	1,91	55	—	31	45	4,55	137	68	0,390	20,0
120×120×11	120	11	13	6	25,4	19,9	3,36	19,49	4,70	3,80	29,1	39,5	12,0	741	4,84	140	29,9	2,35	60	80	27	40	5,88	201	89	0,468	19,9
120×120×13		13			29,9	23,4	3,44		4,90	3,90	34,1	46,6	14,1	965	4,84	162	33,3	2,34	60	80	25	40	5,85	232	87	0,468	23,3
130×130×12	130	12	14	7	29,9	23,6	3,64	24,19	5,11	4,00	34,1	50,4	15,3	1,07	5,00	194	37,7	2,55	60	90	25	40	6,35	278	97	0,508	23,6
130×130×14		14			34,4	27,2	3,72		5,30	4,20	38,8	58,2	17,9	1,25	4,97	223	42,4	2,55	60	90	25	40	6,33	317	95	0,508	27,2
150×150×14	150	14	16	8	38,4	30,2	4,20	34,60	5,90	4,70	60,7	69,8	21,4	1,49	6,34	251	46,7	2,62	70	90	25	40	6,30	554	93	0,508	30,9
150×150×16		16			43,3	34,0	4,29		6,00	4,80	67,5	78,2	24,0	1,68	6,45	278	51,5	2,53	70	110	25	40	7,35	615	111	0,586	34,3
150×150×18		18			48,4	38,0	4,37		6,10	4,90	74,2	88,2	27,1	1,88	6,42	304	56,4	2,51	70	110	25	40	7,33	668	110	0,586	38,0

)tel I
AS 565-63



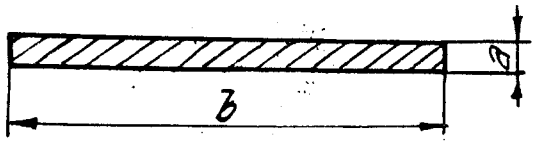
h = înălțimea profilului
b = lățimea tălpilor
d = grosimea inimii
t = " medie a tălpilor
R = raza de rotunjire interioară a tălpilor
r = " " " a tălpilor la vîrf.
I = momentul de inerție

W = modulul de rezistență.
S = momentul static al semisecțiuni

$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ = raza de giratie.

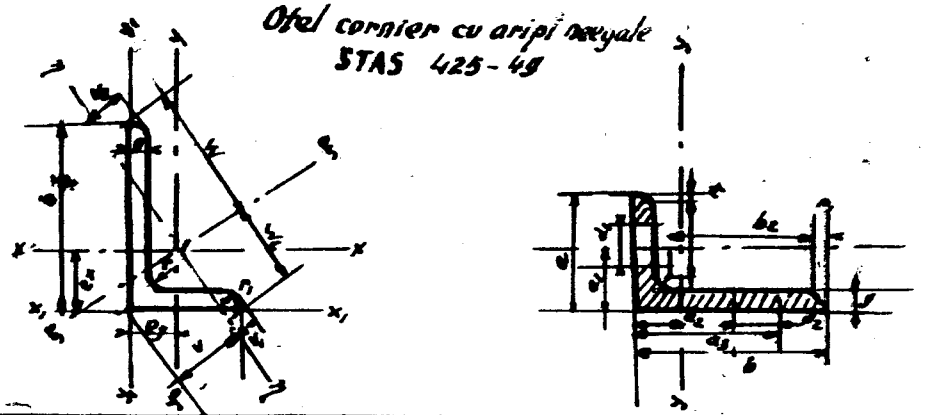
mbol I	Dimensiuni m.m. h	b	t	d=R	r	Aria secțiunii A cm²	Masa G kg/m	Mărimi statice pentru axele de încovoiere X-X I_x cm⁴	W_x cm³	i_x cm	Y-Y I_y cm⁴	W_y cm³	i_y cm	S_x cm³	Simbol I
8	80	42	5,77	3,9	2,3	7,58	5,95	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91	11,4	8
10	100	50	6,64	4,5	2,7	10,6	8,32	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07	19,9	10
12	120	58	7,52	5,1	3,1	14,2	11,2	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23	31,8	12
14	140	66	8,40	5,7	3,4	18,3	14,4	573	81,9	5,61	36,2	10,71	1,40	47,7	14
16	160	74	9,28	6,3	3,8	22,8	17,9	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55	68,0	16
18	180	82	10,16	6,9	4,1	27,9	21,9	1450	161	7,20	81,3	19,8	1,71	93,4	18
20	200	90	11,04	7,5	4,5	33,5	26,3	2140	214	8,00	117	26,0	1,87	125	20
22	220	98	11,92	8,1	4,9	39,6	31,1	3060	278	8,80	162	33,1	2,02	162	22
24	240	106	12,80	8,7	5,2	46,1	36,2	4250	354	9,59	221	41,7	2,20	206	24
26	260	113	13,77	9,4	5,6	53,4	41,9	5740	442	10,4	288	51,0	2,32	257	26
28	280	119	14,85	10,1	6,1	61,1	48,0	7590	542	11,1	364	61,2	2,45	316	28
30	300	125	15,82	10,8	6,5	69,1	54,2	9800	653	11,9	451	72,2	2,56	381	30
32	320	131	16,92	11,5	6,9	77,8	61,1	12510	782	12,7	555	84,7	2,67	457	32
36	360	143	19,05	13,0	7,8	97,1	76,2	19610	1090	14,2	818	114,0	2,90	638	36
40	400	155	21,10	14,4	8,6	118	92,6	29210	1460	15,7	1160	149,0	3,13	857	40

PLATBANDE STAS 335-57



Lățime		Grosimi a mm								
b mm	Abateri limită mm	6	8	10	12	15	20	25	30	40
		Abateri limită la grosimi, mm								
		+0,4 −0,5			+0,6 −0,7			+0,7 −0,8		+0,8 −0,9
		Greutate kgf/m								
160	+2,5 −3,0	7,54	10,1	12,6	15,1	18,9	25,1	—	—	—
180		8,48	11,3	14,1	17,0	21,2	28,3	35,3	42,4	56,5
200		9,42	12,6	15,7	18,9	23,6	31,4	39,3	47,1	62,8
220	+3 −4	—	13,8	17,8	20,7	25,9	34,5	43,2	51,6	—
250		11,8	15,7	19,6	23,5	29,4	39,2	49,1	58,9	78,5
280		—	17,6	22,0	26,4	33,0	44,0	54,9	65,9	—
300		14,1	18,8	23,6	28,3	35,3	47,1	58,9	70,6	—
320		—	20,1	25,1	30,1	37,7	50,2	—	—	—
360		16,5	22,0	27,5	33,0	41,2	54,9	—	—	
380	+4 −5	—	23,9	29,8	35,8	44,7	59,7	—	—	—
400		—	25,1	31,4	37,7	47,1	62,8	—	—	—
420		—	26,4	33,0	39,6	49,5	65,9	—	—	—
450		—	28,3	35,3	42,4	53,0	70,6	—	—	—
500	+5 −6	—	31,4	39,2	47,1	58,9	78,5	—	—	—
550		—	34,5	43,2	51,8	64,8	86,3	—	—	—
(600)		—	37,7	47,1	56,5	70,6	94,2	—	—	—

Otel cornier cu aripi neegale
STAS 425-49



I = moment de inerție

W = modul de rezistență

$i = \sqrt{\frac{I}{S}}$ = raza de giratie

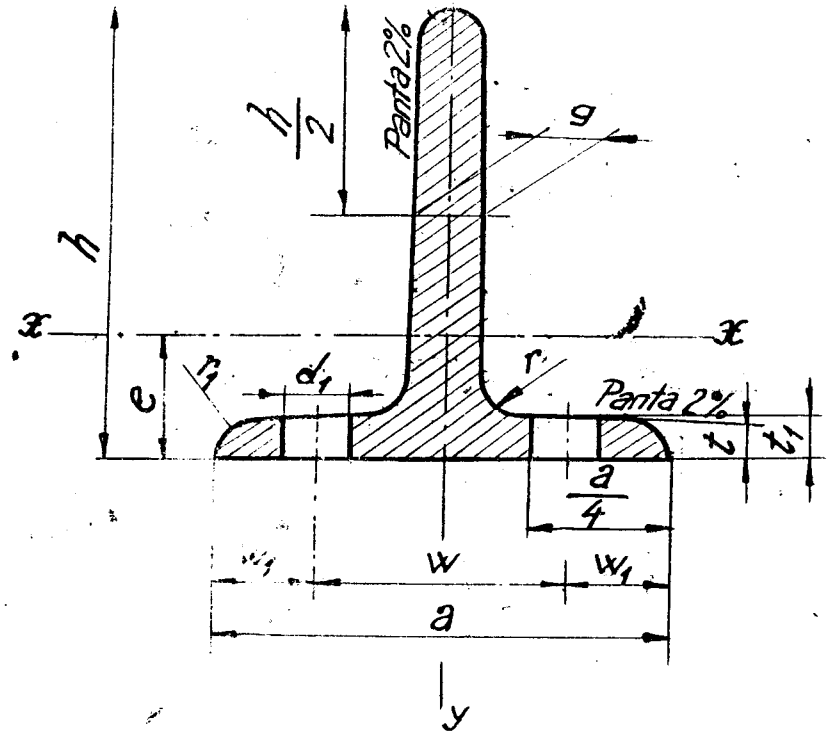
$S_{t\,max}$ = lungimea maximă de flambaj pentru $\lambda_{max} = 250$

I_{xy} = moment. centrifugal

e = distanța dintre două corniere pentru a obține aceleași momente de inerție pentru cele două axe.

$I = 2I_x$ pentru un element astfel compus TT cu dis. a între profile.

	Dimensiuni m.m.					Secțiunea S cm^2	Greutatea Q kgf/m	Distanța axelor		Pentru axa de încovoiere.													Poziția axei η-η $tg\,\alpha$
										x-x			y-y			y-y			η-η			x_1-x_1	y_1-y_1	
	a	b	g	r	r_1			e_x	e_y	I_x cm^4	W_x cm^3	i_x cm	I_y cm^4	W_y cm^3	i_y cm	I_η cm^4	W_η cm^3	i_ξ cm	I_η cm^4	W_η cm^3	i_η cm	I_{x_1} cm^4	I_{y_1} cm^4	
40 x 60 x 5	40	60	5	6	3	4,79	3,76	1,96	0,97	17,2	4,25	1,89	6,11	2,02	1,13	19,8	4,85	2,03	3,50	1,67	0,86	35,6	10,6	0,437
40 x 60 x 6			6			5,68	4,46	2,00	1,01	20,1	5,03	1,88	7,12	2,38	1,12	23,1	5,68	2,02	4,12	1,98	0,85	42,8	12,9	0,433
40 x 60 x 7			7			6,65	5,14	2,04	1,05	23,0	5,79	1,87	8,07	2,74	1,11	26,3	6,51	2,00	4,73	2,28	0,85	50,2	15,3	0,429
50 x 65 x 7	50	65	7	6,5	3,5	7,60	5,97	2,07	1,33	31,0	6,99	2,02	15,8	4,31	1,44	38,4	8,53	2,25	8,37	3,53	1,05	63,6	29,2	0,574
50 x 65 x 9			9			9,58	7,52	2,15	1,41	38,2	8,77	2,00	19,4	5,39	1,42	47,0	10,5	2,22	10,5	4,68	1,05	77,5	38,4	0,567
65 x 80 x 6	65	80	6	8	4	8,41	6,60	2,39	1,65	62,8	9,41	2,51	31,2	6,44	1,93	68,5	12,2	2,85	15,6	5,30	1,36	100	54,1	0,649
65 x 80 x 8			8			11,0	8,66	2,47	1,73	60,1	12,3	2,49	40,1	8,41	1,91	88,0	15,7	2,82	20,3	6,80	1,36	135	73,0	0,645
65 x 80 x 10			10			13,6	10,7	2,55	1,81	82,2	15,1	2,46	48,3	10,3	1,89	106	19,1	2,79	24,8	8,40	1,35	171	92,8	0,640
75 x 100 x 7	75	100	7	10	5	11,9	9,32	3,06	1,83	118	17,0	3,15	56,9	10,0	2,19	145	20,8	3,49	30,1	8,33	1,59	229	96,8	0,553
75 x 100 x 9			9			15,1	11,8	3,15	1,91	148	21,5	3,13	71,0	12,7	2,17	181	26,2	3,47	37,8	10,4	1,59	298	126	0,549
75 x 100 x 11			11			18,2	14,3	3,23	1,99	176	25,9	3,11	84,0	15,3	2,15	214	31,1	3,44	45,4	12,4	1,58	366	156	0,545
80 x 120 x 8	80	120	8	11	5,5	15,5	12,2	3,83	1,87	226	27,6	3,82	80,8	13,2	2,29	261	31,7	4,10	45,8	10,9	1,72	453	135	0,441
80 x 120 x 10			10			19,1	15,0	3,92	1,95	276	34,1	3,80	98,1	16,2	2,27	318	38,9	4,07	56,1	13,4	1,71	579	171	0,438
80 x 120 x 12			12			22,7	17,8	4,00	2,03	323	40,4	3,77	114	19,1	2,25	371	45,6	4,04	66,1	15,8	1,71	686	208	0,433
100 x 150 x 10	100	150	10	13	6,5	24,2	19,0	4,80	2,84	552	54,1	4,78	198	25,8	2,86	637	62,0	5,13	112	21,3	2,15	1110	326	0,442
100 x 150 x 12			12			28,7	22,6	4,89	2,42	650	64,2	4,76	232	30,6	2,84	749	73,4	5,10	132	25,2	2,15	1336	400	0,439
100 x 150 x 14			14			33,2	26,1	4,97	2,50	744	74,1	4,73	264	35,2	2,82	866	83,9	5,07	152	29,1	2,14	1564	471	0,435



I = moment de inerție

W = modul de rezistență

$i = \sqrt{\frac{I}{S}}$ = raza de girație

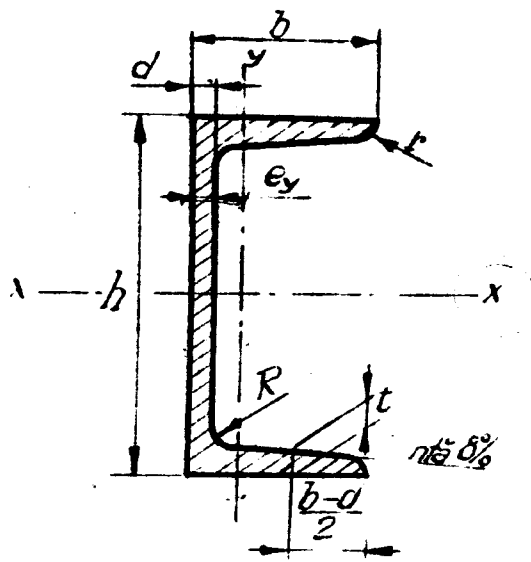
$S'_{kmax} = l_{max}$ = lungimea maximă de flambaj pentru $\lambda = 250$

$S_{kmax} = 50 i_{min}$ = lungimea maximă de flambaj în secțiunea compusă

U = suprafața de vopsire pe unitatea de lungime.

T	Dimensiuni în mm					Secțiune S cm²	Greutate G kgf/m	e cm	Pentru axa de încovoiere						U m²/m	S'_{kmax} m	S_{kmax} m	Distanța de găurire *)			t_1 mm
									x – x			y – y									
	a	h	$g = t = r$	r_1	r_2				I_x cm⁴	W_x cm³	i_x cm	I_y cm⁴	W_y cm³	i_y cm				w mm	d_1 mm	w_1 mm	
2	20	20	3	1,5	1	1,12	0,88	0,58	0,38	0,27	0,58	0,20	0,20	0,42	0,075	1,05	0,210	—	—	—	2,90
2½	25	25	3,5	2	1	1,64	1,29	0,73	0,87	0,49	0,73	0,43	0,34	0,51	0,094	1,28	0,255	—	—	—	3,37
3	30	30	4	2	1	2,26	1,77	0,85	1,72	0,80	0,87	0,87	0,58	0,62	0,114	1,55	0,310	—	—	—	3,86
4	40	40	5	2,5	1	3,77	2,96	1,12	5,28	1,84	1,18	2,58	1,29	0,83	0,153	2,08	0,415	24	(6,5)	8	4,80
5	50	50	6	3	1,5	5,66	4,44	1,39	12,1	3,36	1,46	6,06	2,42	1,03	0,191	2,58	0,515	30	(6,5)	10	5,75

*) Pentru dimensiuni denituri mai mici decît d_1 dimensiunile w și w_1 vor rămîne aceleași.



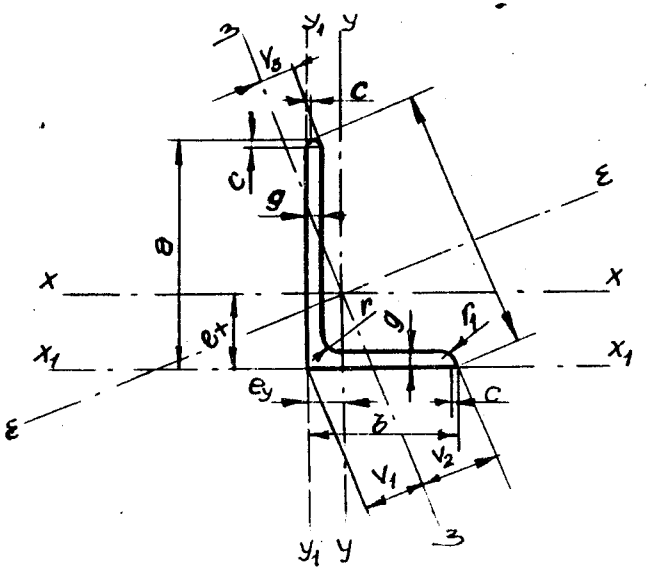
OTEL U
oțel laminat la cald

STAS 564-63

h înălțimea profilului
b = lățimea tălpilor
d = grosimea inimii
t = grosimea medie a tălpilor
R = raza de rotunjire interioară a tălpilor
r = raza de rotunjire a tălpilor la vîrf

I = moment de inerție
W = modul de rezistență
$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ = raza de girație
S = momentul static al semisecțiunii
e_y = distanța axei Y-Y de la marginea exterioară a inimii.

Simbol U	Dimensiuni mm h	b	d	t	R	r	Aria secțiunii A cm²	Masa G kg/m	Mărimi statice pentru axele de încovoiere X-X I_x cm⁴	W_x cm³	i_x cm	Y-Y I_y cm⁴	W_y cm³	i_y cm	S_x cm³	e_y cm	Simbol U
5	50	38	5	7	7	3,5	7,12	5,59	26,4	10,6	1,92	9,12	3,75	1,13	—	1,37	5
6½	65	42	5,5	7,29	7,15	4	9,03	7,09	57,5	17,7	2,52	14,1	5,07	1,25	—	1,42	6½
8	80	45	6	7,70	7,55	4	11,0	8,64	106	26,5	3,10	19,4	6,36	1,33	15,9	1,45	8
10	100	50	6	8,20	8,02	4,5	13,5	10,6	205	41,2	3,91	29,3	8,49	1,47	24,5	1,55	10
12	120	55	7	8,72	8,4	4,5	17,0	13,4	364	60,7	4,62	43,2	11,1	1,59	36,3	1,60	12
14	140	60	7	9,72	9,44	5	20,4	16,0	605	86,4	5,45	62,7	14,8	1,75	51,4	1,75	14
16	160	65	7,5	10,20	9,90	5,5	24,0	18,8	925	116	6,21	85,3	18,3	1,89	68,8	1,84	16
18	180	70	8	10,68	10,36	5,5	28,0	22,0	1350	150	6,95	114	22,4	2,02	89,6	1,92	18
20	200	75	8,5	11,16	10,82	6,0	32,2	25,3	1910	191	7,70	148	27,0	2,14	114	2,01	20
22	220	80	9	12,14	11,78	6,5	37,4	29,4	2690	245	8,48	197	33,6	2,30	146	2,14	22
24	240	85	9,5	12,62	12,24	6,5	42,3	33,2	3600	300	9,22	248	39,6	2,42	179	2,23	24
26	260	90	10	13,60	13,20	7,0	48,3	37,9	4820	371	9,99	317	47,7	2,56	221	2,36	26
30	300	100	10	15,60	15,20	8,0	58,8	46,2	8030	535	11,7	495	67,8	2,90	316	2,70	30



OȚEL LAMINAT LA CALD — STAS 425-62

OȚEL CORNIER CU ARIPI NEEGALE

I = moment de inerție.
$i = \sqrt{\frac{I}{S}}$ = raza de giratie raportate la axa de încovoiere respectivă.
W = modul de rezistență

Simbolul L	Dimensiunile secțiunii a	b	g	r	r_1	Secțiunea S	Masa G	Distanțele axelor e_x	e_y	W_1	W_2	r_1	r_2	r_3	Unghi de înclinare a axelor	Mărimile statice pentru axele de încovoiere X-X I_x	W_x	i_x	Y-Y I_y	W_y	i_y	ξ-ξ I_ξ	W_ξ	i_ξ	η-η I_η	W_η	i_η	x_1-x_1 I_{x_1}	y_1-y_1 I_{y_1}
	mm					cm^2	kg/m	cm							tg α	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	I_{max} cm^4	cm^3	i_{max} cm	I_{min} cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^4
25×16× 3	25	16	3	3,5	1,5	1,16	0,91	0,86	0,42	1,68	1,23	0,70	0,81	0,43	0,391	0,70	0,43	0,78	0,22	0,19	0,44	0,79	0,47	0,82	0,13	0,16	0,34	1,56	0,45
32×20× 3	32	20	3	3,5	1,5	1,49	1,17	1,08	0,49	2,16	1,55	0,84	1,08	0,52	0,382	1,52	0,72	1,01	0,46	0,30	0,55	0,70	0,79	1,07	0,27	0,25	0,43	3,26	0,82
4			4			1,94	1,52	1,12	0,53	2,13	1,57	0,89	1,08	0,55	0,377	1,93	0,93	1,00	0,47	0,39	0,54	2,15	1,01	1,05	0,35	0,32	0,43	4,38	1,12
40×25× 3	40	25	3	4	1,5	1,89	1,48	1,32	0,59	2,71	1,92	1,03	1,37	0,62	0,386	3,06	1,14	1,27	0,93	0,49	0,70	3,43	1,27	1,34	0,56	0,40	0,54	6,37	1,58
4			4			2,47	1,94	1,37	0,63	2,68	1,95	1,08	1,36	0,66	0,381	3,93	1,49	1,26	1,18	0,63	0,69	4,39	1,64	1,33	0,71	0,52	0,54	8,53	2,15
45×28× 3	45	28	3	5	2	2,14	1,68	1,47	0,64	3,06	2,14	1,12	1,55	0,68	0,382	4,41	1,45	1,43	1,32	0,61	0,79	4,94	1,61	1,51	0,79	0,51	0,61	9,02	2,20
4			4			2,80	2,20	1,51	0,68	3,08	2,17	1,17	1,56	0,72	0,379	5,68	1,90	1,42	1,69	0,80	0,78	6,39	2,09	1,50	1,02	0,66	0,60	12,1	2,98
50×32× 3	50	32	3	5,5	2	2,42	1,90	1,60	0,72	3,45	2,41	1,27	1,75	0,80	0,403	6,17	1,82	1,60	1,99	0,81	0,91	6,98	2,04	1,70	1,19	0,68	0,70	12,4	3,26
4			4			3,17	2,49	1,65	0,76	3,39	2,44	1,32	1,71	0,83	0,401	7,98	2,38	1,59	2,56	1,05	0,90	9,02	2,65	1,68	1,52	0,87	0,69	16,6	4,42
56×36× 3,5	56	36	3,5	6	2	3,16	2,48	1,80	0,82	3,83	2,64	1,44	1,96	0,92	0,407	10,1	2,65	1,79	3,30	1,19	1,02	11,4	2,99	1,91	1,95	0,99	0,79	20,3	5,43
4			4			3,58	2,81	1,82	0,84	3,82	2,65	1,46	1,95	0,94	0,406	11,4	3,01	1,78	3,70	1,34	1,02	12,9	3,38	1,90	2,19	1,12	0,78	23,2	6,25
5			5			4,41	3,46	1,87	0,88	3,80	2,67	1,51	1,95	0,97	0,404	13,8	3,70	1,77	4,48	1,65	1,01	15,6	4,12	1,88	2,26	1,36	0,78	29,2	7,91

B I B L I O G R A F I E

I. Н.М.Беляев – Сборник задач по сопротивлению материалов, Москва 1965.

2. С.М.Белявский – Руководство к решению задач по сопротивлению материалов, Москва 1964.

3. A.A. Beleş, R.P. Voinea – Rezistenţa materialelor, vol.II, Bucureşti, Editura tehnică 1957.

4. O. Belluzzi – La stabilità dell equillibrio elastico. La vibrazioni. Scienza della constentzionà. Ed.Zanichelli – Bologna, 1955.

5.Ghe. Buzdugan – Rezistenţa materialelor, Editura didactică şi pedagogică – Bucureşti 1964.

6. Gh. Buzdugan, A.Beleş ş.a. – Culegere de probleme din Rezistenţa Materialelor, Bucureşti, 1962 (vol.I), 1963 (vol.II).

7. И.В. Дарков, В.И. Кузнецов – Статика сооружении, Москва 1951.

8. I. Deutsch – Probleme de Rezistenţa Materialelor, Bucureşti 1961

9. M.Filonenco-Borodici – Rezistenţa materialelor (traduc.) partea I, 1951, partea II, 1952.

10. Eugen Fleşeriu – Rezistenţa materialelor în probleme şi aplicaţii (vol I şi vol.V), Timişoara 1958.

II. Н.М. Иванов – Сборник задач по сопротивлению материалов, Москва 1956.

12. W.Orlowski, . Slowanski – Wytrymalosč Materialów, Przykłady Oblicaeń Warszawa 1962.

TABLA DE MATERIE

Capitolul I

Solicitări axiale . . . . . pag. 2

Eforturi din temperatură şi montaj

Capitolul II

Forfecări, Îmbinări . . . . . " 54

Capitolul III

Diagrame şi forţe axiale, forţe tăietoare şi momente încovoietoare . . . . . " 84

Capitolul IV

Momente de inerţie ale figurilor plane . . " 116

Capitolul V

Încovoiere simplă. Starea de tensiune plană. Încovoiere în domeniul plastic. Grinzi cu secţiune compusă. Încovoiere oblică. . . . " 166

BIBLIOTECA